И. А. ИБРАГИМОВ, Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ
ИНФОРМАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА
И СУПЕРЭФФЕКТИВНЫЕ ОЦЕНКИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 22 XII 1971)

1. Пусть $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ — повторная выборка из генеральной совокупности с распределением $\mathcal{P}_\theta$, зависящим от параметра θ . Будем предполагать, что случайные величины X_j принимают значения из некоторого множества $\mathcal{X}$, а все распределения $\mathcal{P}_\theta$ абсолютно непрерывны относительно σ -конечной меры ν , определенной на некоторой σ -алгебре подмножеств $\mathcal{X}$. Областью задания параметра θ будем считать открытое множество Θ вещественной прямой R^1 . Обозначим P_θ распределение вероятностей, порожденное «бесконечной» выборкой $X_1, X_2, \dots$; через E_θ будем обозначать математическое ожидание относительно P_θ .

Если $\bar{\theta}_n(X^n)$ — оценка параметра θ по выборке X^n , будем обозначать через $S_n(\bar{\theta}_n; \theta)$ функцию риска при квадратичной функции потерь, т. е. $S_n(\bar{\theta}_n; \theta) = E_\theta(\bar{\theta}_n - \theta)^2$, и будем рассматривать ниже лишь те оценки, для которых функция $S_n(\bar{\theta}_n; \theta) = S_n(\theta)$ суммируема на каждом компакте из Θ . Через $b_n(\bar{\theta}_n; \theta) = b_n(\theta)$ будем обозначать смещение оценки $\bar{\theta}_n$, т. е. $M_n(\theta) = E_\theta \bar{\theta}_n = \theta + b_n(\theta)$.

Пусть, наконец $d\mathcal{P}_\theta/d\nu = f(x, \theta)$ — плотность распределения $\mathcal{P}_\theta$, $x \in \mathcal{X}, \theta \in \Theta$.

Теорема 1. Для любой оценки $\bar{\theta}_n$ с конечным риском $S_n(\theta)$ и всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}(S_n(\theta_1) + S_n(\theta_2)) \geq \frac{1}{4}(M(\theta_2) - M(\theta_1))^2 \times \\ \times \left[n^{-1} \left(\int (Vf(x, \theta_2) - Vf(x, \theta_1))^2 \nu(dx) \right)^{-1} - 1 \right] + \frac{1}{2}(b_n^2(\theta_1) + b_n^2(\theta_2)). \quad (1)$$

2. В этом пункте будем предполагать, что плотность $f(x, \theta)$ для ν -почти всех x есть абсолютно непрерывная функция θ и что для всех θ существует конечное информационное количество Фишера

$$I(\theta) = \int \frac{|f'_\theta(x, \theta)|^2}{f(x, \theta)} \nu(dx)$$

(подынтегральное выражение считается равным нулю там, где $f(x, \theta) = 0$). Будем для простоты считать, что $\inf_\theta I(\theta) > m > 0$. Устремляя в

(1) θ_2 к θ_1 , получим следующий результат.

Теорема 2 (Неравенство Рао — Крамера). В условиях п.п. 1, 2 функция $b_n(\theta)$ абсолютно непрерывна и для любой точки $\theta \in \Theta$

$$\frac{1}{2}(S_n(\theta) + \lim_{u \rightarrow \theta} S_n(u)) \geq \\ \geq \left[\lim_{u \rightarrow \theta} \left(\frac{M_n(u) - M_n(\theta)}{u - \theta} \right)^2 \right] \left/ \left[n \lim_{u \rightarrow \theta} \frac{1}{u - \theta} \int_0^u I(v) dv \right] \right. + b_n^2(\theta). \quad (2)$$

В частности, для почти всех $\theta \in \Theta$

$$S_n(\theta) \geq (1 + b_n^4(\theta))^2 / (nI(\theta)) + b_n^2(\theta). \quad (3)$$

Интегрируя последнее неравенство по интервалу $[\theta, \theta + h] \subset \Theta$, получим следующие интегральные неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\theta}^{\theta+h} S_n(u) du &\geq \frac{1}{h} \int_{\theta}^{\theta+h} \frac{(1+b'(u))^2}{nI(u)} du + \frac{1}{h} \int_{\theta}^{\theta+h} b_n^2(u) du \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{b_n(\theta+h) - b_n(\theta)}{h}\right)^2 / \left(\frac{n}{h} \int_{\theta}^{\theta+h} I(u) du\right) + \frac{1}{h} \int_{\theta}^{\theta+h} b_n^2(u) du. \end{aligned} \quad (4)$$

Из неравенства (4), в свою очередь, вытекает следующая

Теорема 3. В условиях теоремы 2 для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \Theta$ при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\alpha}^{\beta} nS_n(u) du \geq \int_{\alpha}^{\beta} (I(u))^{-1} du + v(1). \quad (5)$$

Примечательная сторона этого неравенства в том, что главный член правой части не зависит от смещения. Впервые неравенства такого типа (и более точные) получил Н. Н. Ченцов при других предположениях (4).

3. Сформулированные в п. 2 результаты легко распространяются на тот случай, когда параметрическое множество Θ есть открытое множество в R^m , $m > 1$. При этом, конечно, θ , $b_n(\theta)$, $\partial f/\partial\theta$ — векторы (для определенности, векторы-столбцы), $S_n(\theta) = E_0(\bar{\theta}_n - \theta)(\bar{\theta}_n - \theta)^*$, $I(\theta) = \int \frac{(\partial f/\partial\theta)(\partial f^*/\partial\theta)}{f} v(dx)$ — матрицы.

Например, аналогом неравенства (1) будет следующее неравенство, в котором λ — произвольный вектор из R^m , $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ((S_n(\theta_1) + S_n(\theta_2))\lambda, \lambda) &\geq \frac{1}{4} (\lambda, M(\theta_2) - M(\theta_1))^2 \times \\ &\times \left[n^{-1} \left(\int (V\overline{f(x, \theta_2)} - V\overline{f(x, \theta_1)})^2 v(dx) \right)^{-1} - 1 \right] + \frac{1}{2} [(\lambda, b_n(\theta_1))^2 + (\lambda, b_n(\theta_2))^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Определение. Пусть $U \subset \Theta$ — открытое множество. Будем писать, что определенная в U функция $\varphi(\theta) \in C_1^0(U)$, если она дифференцируема почти всюду по θ при $\theta \in U$ и для всех $\theta, \mu \in U$ таких, что $\theta + t\mu \in U$ при $0 \leq t \leq 1$, функция одного переменного $\varphi(\theta + t\mu)$ абсолютно непрерывна по t .

Если $f(x, \theta) \in C_1^0(U)$ для почти всех x по мере v , то из (6) легко получить многомерные аналоги теорем 2 и 3.

4. **Теорема 4.** Пусть $U \subset \Theta$ — открытое множество в R^m , $f(x, \theta) \in C_1^0(U)$ для v -почти всех x , матрица $I(\theta)$ невырождена и непрерывна в U , а оценка $\bar{\theta}_n$ параметра θ такова, что максимальное собственное значение $\lambda_n(\theta)$ симметричной матрицы $nS_n(\theta) - I^{-1}(\theta)$ равномерно в U не превосходит $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ (равномерно в U не хуже асимптотически эффективной).

Тогда равномерно в каждом компакте из U имеет место соотношение

$$\lim_n nS_n(\bar{\theta}_n) = I^{-1}(\theta).$$

Будем говорить, что точка $\theta \in \Theta$ есть точка суперэффективности для оценки $\bar{\theta}_n$, если $\lim_n \lambda_n(\theta) < 0$. (В одномерном случае это определение совпадает с хорошо известным, см. (2).) Из теоремы 4 вытекает, что оценка $\bar{\theta}_n$, которая равномерно на открытом множестве не хуже асимптотически эффективной, не может быть суперэффективной ни в одной точке этого множества.

Из равенства (5) и его многомерного аналога следует, что множество точек суперэффективности имеет меру нуль.

5. Свойства суперэффективных оценок, изложенные в ~~пункте~~ **леме 4**, были впервые отмечены Ле Камом в известной работе ~~...~~ Ле Кам указал эти свойства для ограниченных функций потерь и в ~~предположении~~, что выполняются более жесткие условия регулярности. Метод его ~~значительно~~ менее элементарен, чем указанный выше, и основан на ~~глубоком~~ асимптотическом анализе апостериорных распределений. Комбинируя этот метод с результатами статьи авторов ⁽³⁾, можно получить следующий результат: пусть выполняются условия регулярности ~~замечания 1~~. Тогда для любого конечного интервала $[a, b]$ и любой оценки $\tilde{\theta}_n$ при $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b E_\theta |\tilde{\theta}_n - \theta|^\alpha d\theta \geq \frac{2^{1/2(\alpha+1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{n^{\alpha/2} \sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{d\theta}{I^{\alpha/2}(\theta)} (1 + o(1)), \quad \alpha \geq 1.$$

Это неравенство есть аналог соотношения (3). Из него следует, что для почти всех θ выполняется

$$\overline{\lim}_n n^{\alpha/2} E_\theta |\tilde{\theta}_n - \theta|^\alpha \geq \frac{2^{1/2(\alpha+1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} I^{\alpha/2}(\theta)}.$$

Таким образом, множество точек суперэффективности в смысле функции потерь $|d - \theta|^\alpha$ также имеет лебегову меру нуль.

6. Приведенные в п.п. 2—4 результаты обобщаются и на схему последовательного оценивания (см., например, ⁽⁴⁾), когда момент окончания наблюдений τ — марковский случайный момент.

В частности, если $E_u \tau < \infty$ для $u \in [\theta_1, \theta_2]$, то обозначая $S(\theta) = E_\theta (\bar{\theta}_\tau - \theta)^2$, $M(\theta) = E_\theta \bar{\theta}_\tau$, $b(\theta) = M(\theta) - \theta$, получим в условиях п. 2 неравенство (ср. ⁽⁵⁾)

$$\begin{aligned} & 1/2 (S(\theta_2) + S(\theta_1)) \geq (M(\theta_2) - M(\theta_1))^2 \times \\ & \times \left[\left((\theta_2 - \theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} I(u) E_u \tau du \right)^{-1} - 1/4 \right] + 1/2 (b^2(\theta_1) + b^2(\theta_2)). \end{aligned}$$

Из этого неравенства с помощью аналога теоремы 4 можно вывести, что последовательное оценивание асимптотически не даст выигрыша в дисперсии оценки при том же среднем числе наблюдений, что и оценивание с помощью выборок неслучайного объема, если ограничиться оценками, равномерно в открытом множестве не худшими, чем асимптотически эффективные.

Авторы выражают благодарность Н. Н. Ченцову за полезное обсуждение.

Поступило
3 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Ченцов, Теория вероятн. и ее применен., **12**, 4 (1967). ² L. Le Cam, Univ. Calif. Publ. Stat., **1**, 277 (1953). ³ И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, ДАН, **198**, № 3 (1971). ⁴ Ю. В. Линник, И. В. Романовский, ДАН, **194**, № 2 (1970). ⁵ J. Wolfowitz, Ann. Math. Stat., **18**, № 2 (1947).

5. Свойства суперэффективных оценок, изложенные в конце п. 4, были впервые отмечены Ле Камом в известной работе (2). Ле Кам доказал эти свойства для ограниченных функций потерь и в предположении, что выполняются более жесткие условия регулярности. Метод его значительно менее элементарен, чем указанный выше, и основан на глубоком асимптотическом анализе апостериорных распределений. Комбинируя этот метод с результатами статьи авторов (3), можно получить следующий результат: пусть выполняются условия регулярности заметки (3). Тогда для любого конечного интервала $[a, b]$ и любой оценки $\tilde{\theta}_n$ при $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b E_{\theta} |\tilde{\theta}_n - \theta|^{\alpha} d\theta \geq \frac{2^{1/2(\alpha+1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{n^{\alpha/2} \sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{d\theta}{I^{\alpha/2}(\theta)} (1 + o(1)), \quad \alpha \geq 1.$$

Это неравенство есть аналог соотношения (3). Из него следует, что для почти всех θ выполняется

$$\overline{\lim}_n n^{\alpha/2} E_{\theta} |\tilde{\theta}_n - \theta|^{\alpha} \geq \frac{2^{1/2(\alpha+1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} I^{\alpha/2}(\theta)}.$$

Таким образом, множество точек суперэффективности в смысле функции потерь $|d - \theta|^{\alpha}$ также имеет лебегову меру нуль.

6. Приведенные в п.п. 2—4 результаты обобщаются и на схему последовательного оценивания (см., например, (4)), когда момент окончания наблюдений τ — марковский случайный момент.

В частности, если $E_u \tau < \infty$ для $u \in [\theta_1, \theta_2]$, то обозначая $S(\theta) = E_{\theta} (\tilde{\theta}_{\tau} - \theta)^2$, $M(\theta) = E_{\theta} \tilde{\theta}_{\tau}$, $b(\theta) = M(\theta) - \theta$, получим в условиях п. 2 неравенство (ср. (5))

$$\begin{aligned} & 1/2 (S(\theta_2) + S(\theta_1)) \geq (M(\theta_2) - M(\theta_1))^2 \times \\ & \times \left[\left[(\theta_2 - \theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} I(u) E_u \tau du \right]^{-1} - 1/4 \right] + 1/2 (b^2(\theta_1) + b^2(\theta_2)). \end{aligned}$$

Из этого неравенства с помощью аналога теоремы 4 можно вывести, что последовательное оценивание асимптотически не даст выигрыша в дисперсии оценки при том же среднем числе наблюдений, что и оценивание с помощью выборок неслучайного объема, если ограничиться оценками, равномерно в открытом множестве не худшими, чем асимптотически эффективные.

Авторы выражают благодарность Н. Н. Ченцову за полезное обсуждение.

Поступило
3 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Ченцов, Теория вероятн. и ее применен., 12, 4 (1967). ² L. Le Cam, Univ. Calif. Publ. Stat., 1, 277 (1953). ³ И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, ДАН, 193, № 3 (1971). ⁴ Ю. В. Линник, И. В. Романовский, ДАН, 194, № 2 (1970). ⁵ J. Wolfowitz, Ann. Math. Stat., 18, № 2 (1947).