

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. Я. ИВРИН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ГЛАДКИМИ КОРНЯМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 XII 1971)

Известно, что для того чтобы нехарактеристическая задача Коши была хорошо поставлена, необходима гиперболичность уравнения ⁽¹⁾. Но это условие не является достаточным, и при данной главной части уравнения могут появиться условия на младшие члены, необходимые для хорошей постановки задачи Коши.

С другой стороны, для многих уравнений, строго гиперболических и некоторых других, условий на младшие члены не возникает, и задача Коши будет хорошо поставлена для любых уравнений, отличающихся от данных гладкими младшими членами.

Возникает задача об описании всех таких уравнений, которые мы называем регулярно гиперболическими, или хотя бы всех таких уравнений, принадлежащих определенному классу. В настоящей работе решается эта задача для класса уравнений с гладкими корнями.

Будем использовать следующие обозначения: $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in \Omega \subset R^{l+1}$, Ω — область; $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l) \in R^{l+1} \setminus \{0\}$; $\Omega_T^+ = \{x \in \Omega, x_0 > T\}$; $S_T = \{x \in \Omega, x_0 = T\}$; $\bar{\Omega}$ — замыкание Ω ;

$$L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad L_s(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

где $0 \leq s \leq m$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_l)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_l$, $\xi^\alpha = \xi_0^{\alpha_0} \dots \xi_l^{\alpha_l}$.

Будем предполагать, что $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ и $a_{(m, 0, \dots, 0)}(x) \equiv L_m(x, (1, 0, \dots, 0)) \neq 0$ нигде в Ω ;

$$L^{(i)}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} L(x, \xi), \quad L_{,j}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial x_j} L(x, \xi),$$

$$L \equiv L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

где $D = (D_0, \dots, D_l)$, $D_j = -i \partial / \partial x_j$.

Определение 1. Рассмотрим задачу Коши в слабой форме:

$$Lu = f, \tag{1_w}$$

$$\text{supp } u \in \overline{\Omega_T^+}. \tag{2_w}$$

Будем называть задачу Коши слабо хорошо поставленной, если для любой $f \in C_0^\infty(\Omega \cap \overline{\Omega_T^+})$ существует $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющая (1_w) — (2_w), и если из того, что $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяет (1_w) — (2_w) и $\text{supp } f \subset \overline{\Omega_t^+}$ следует, что и $\text{supp } u \subset \overline{\Omega_t^+}$ при произвольном $t > T$.

Определение 2. Рассмотрим задачу Коши в более сильной форме:

$$Lu = f \quad \text{в } \Omega_T^+, \tag{1_s}$$

$$D_0^j u|_{S_T} = \varphi_j, \quad 0 \leq j \leq m-1. \tag{2_s}$$

Будем называть задачу Коши сильно хорошо поставленной, если для любых $f \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi_j \in C^\infty(S_T)$ задача (1_s) — (2_s) имеет решение $u \in C^\infty(\Omega \cap \Omega_T^+)$ и если из того, что $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяет (1_{*}) — (2_w) и $\text{supp } f \subset \Omega_t^+$ следует, что и $\text{supp } u \subset \Omega_t^+$ при произвольном $t > T$.

Определение 3. Гиперболический относительно D_0 в Ω оператор L назовем слабо (сильно) регулярно гиперболическим относительно D_0 в Ω , если для любой точки $\hat{x} \in \Omega$ существуют окрестность $G \ni \hat{x}$ и число $T_0 < \hat{x}_0$ такие, что задача Коши будет слабо (сильно) хорошо поставлена в G при любом $T \geq T_0$ для всех операторов L' , отличающихся от L гладкими младшими членами.

Теорема 1. Если L слабо регулярно гиперболическа в Ω относительно D_0 , то при любых $(x, \xi') \in \Omega \times (R^l \setminus \{0\})$ уравнение

$$L_m(x, \xi_0, \xi') = 0 \quad (3)$$

имеет лишь корни кратности 1 и 2.

Теорема 2. Пусть уравнение (3) имеет корни кратности, не превышающей 2, и многообразие

$$\mathfrak{M} = \{(x, \xi) \in \Omega \times (R^{l+1} \setminus \{0\}), L_m(x, \xi) = 0\}$$

принадлежит C^∞ .

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- I) L сильно регулярно гиперболическа в Ω относительно D_0 ;
- II) L слабо регулярно гиперболическа в Ω относительно D_0 ;
- III) L гиперболическа в Ω относительно D_0 и, если при каких-либо $(x, \xi) \in \Omega \times (R^{l+1} \setminus \{0\})$

$$L_m(x, \xi) = L_m^{(j)}(x, \xi) = 0, \quad j = 0, \dots, l,$$

то

$$\Delta(x, \xi) \equiv \sum_{i, j=0}^l (L_m^{(ij)}(x, \xi) L_{m, ij}(x, \xi) - L_{m, j}^{(i)}(x, \xi) L_{m, i}^{(j)}(x, \xi)) \neq 0.$$

Замечание. При выполнении условий теоремы 2, I) задача Коши будет сильно хорошо поставлена в любой линзе пространственного типа (определение в (2)).

О доказательстве. Импликация I) $\Rightarrow$ II) очевидна. Теорема 1 и импликация II) $\Rightarrow$ III) следуют из работы (3). Доказательство же импликации III) $\Rightarrow$ I) является весьма сложным и громоздким. В случае $m = 2$ оно было получено автором раньше (4). Методы доказательства при произвольном m представляют развитие методов доказательства при $m = 2$.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
14 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Mizohata, J. Math. Kyoto Univ., 1, № 1, 109 (1961). ² Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., 1964. ³ В. Я. Иврий, ДАН, 197, № 3, 517 (1971). ⁴ В. Я. Иврий, ДАН, 201, № 4, 778 (1971).