

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

Н. К. НИКОЛЬСКИЙ

ОДНОСТОРОННИЕ И МОДУЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ И В ПОЛОСЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 I 1972)

В этой заметке рассматриваются две следующие задачи:

I. Пусть λ — положительная функция на интервале $[0, 1)$; $h(\lambda)$ — множество всех вещественных функций u , гармонических в круге D комплексной плоскости C^1 , $D = \{\zeta \in C^1: |\zeta| < 1\}$, и удовлетворяющих неравенству $|u(\zeta)| \leq \lambda(|\zeta|)$, $|\zeta| < 1$. Пусть, далее, $v = Gu -$ функция, гармонически сопряженная с функцией u , $v(0) = 0$.

Требуется найти возможно более точную оценку верхней грани M ,

$$M(r) = \sup_{u \in h(\lambda)} |(Gu)(r)|, \quad 0 \leq r < 1, \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

II. Пусть $A(D, \lambda)$ — множество всех функций f , аналитических в D и удовлетворяющих условиям

$$|f(\zeta)| \leq \lambda(|\zeta|), \quad f(0) = 1 \text{ и } f(\zeta) \neq 0, \quad |\zeta| < 1.$$

Требуется найти возможно более точную оценку нижней грани m_D ,

$$m_D(r) = \inf_{f \in A(D, \lambda)} |f(r)|, \quad 0 \leq r < 1, \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

В работе приводятся в известном смысле окончательные решения задач I, II в предположении, что мажоранта λ удовлетворяет некоторым (довольно жестким) ограничениям «правильности» роста. Скорость роста функции λ остается при этом произвольной.

1. Предварительные замечания. Ясно, что задача II равносильна отысканию наилучшей миноранты в классе всех гармонических в D функций u , для которых $u(\zeta) \leq \log \lambda(|\zeta|)$, $u(0) = 0$. С технической точки зрения, в задаче II удобно рассмотреть сначала функции с одной особенностью (например, в точке $\zeta = 1$), т. е. (после конформной переделки в полосу Π , $\Pi = \{\zeta \in C^1: |\operatorname{Im} \zeta| < 1/2\pi\}$) функции f , регулярные в полосе Π , для которых $|f(\zeta)| \leq \lambda_\Pi(\operatorname{Re} \zeta)$ и $f(0) = 1$, $f(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \Pi$; $\lambda_\Pi(t) \equiv \lambda(1 - e^{-t})$, $t \geq 0$. Функция m_Π определяется аналогично m_D .

При специальном выборе мажоранты λ задачи I, II были решены в ^(1, 2) ($\lambda(r) = (1 - r)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ в задаче I; $\lambda(r) = \exp(1 - r)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ в задаче II) и частично в ^(3, 4) ($\lambda \equiv (1 - r)^{-\rho(r)}$ и $\lambda \equiv \exp(1 - r)^{-\rho(r)}$ соответственно, причем на функцию ρ налагались условия «правильности», сходные с используемыми в этой работе; рост функции λ ограничивался условиями $1 \leq \rho_0 = \lim_{r \rightarrow 1} \rho(r) < \infty$, причем в случае $\rho_0 = 1$ рассматривались мажоранты только специального «логарифмического» типа) (см. также ⁽⁵⁾).

Отметим также, что задача об отыскании минорант (типа II) для принципиально иных классов функций рассматривалась многими авторами, см., например, ⁽⁶⁻⁷⁾.

В заключение заметим, что приводимые ниже теоремы позволяют получить критерии возможности спектрального анализа и полноты систем вида $\{\zeta^n f(\zeta)\}_{n=0}^\infty$ в пространствах $A(\lambda) \equiv \{f: |f(\zeta)| = O(\lambda(|\zeta|))\}$ и $\bigcup_{\varepsilon > 0} A(\lambda^{1-\varepsilon})$ и $\bigcap_{\varepsilon > 0} A(\lambda^{1+\varepsilon})$. Эти приложения будут опубликованы.

2. Теоремы об оценке модуля гармонической функции. Определим функцию φ на полуоси $[0, +\infty)$ равенством $\varphi(t) = \log \lambda(1 - e^{-t})$, так что $\lambda(r) = \exp\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$. Всюду далее функция φ предполагается монотонно возрастающей. Все условия «правильности» роста (монотонность, выпуклость и т. д.), которые могут встретиться, будут считаться выполненными при всех достаточно больших значениях аргумента.

Теорема 1. 1) Если функция $1/\varphi'$, где $\varphi' = d \log \lambda / d \log \frac{1}{1-r}$, выпукла (вверх или вниз) и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) > 0$, то существует постоянная $c_1, c_1 > 0$, такая, что

$$M(r) \leq c_1 \lambda(r), \quad r \geq r_1;$$

2) Если $1/\varphi'$ выпукла и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi' = 0$, но $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t)t > 0$, то существует $c_2, c_2 > 0$, такое, что

$$M(r) \leq c_2 \lambda(r) \frac{1}{\varphi'\left(\log \frac{1}{1-r}\right)}, \quad r \geq r_2;$$

3) Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t)t = 0$, существует $c_3, c_3 > 0$, такое, что

$$M(r) \leq c_3 \lambda(r) \cdot \log \frac{1}{1-r}, \quad r \geq r_3.$$

Замечания. 1) Константы c_1, c_2 явно выражаются через $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'$, $\inf_{\geq 0} \varphi'(t)t$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\varphi''|}{\varphi'^2}$; c_3 — абсолютная постоянная.

2) Критическим порядком роста, соответствующим п.1) теоремы, но не охватываемым п.2) будет $\lambda_\alpha(r) = (1-r)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Аналогичный порядок при переходе от п.2) к п.3) дают функции $\lambda_\alpha(r) = \log^\alpha \frac{1}{1-r}$, $0 \leq r < 1$, $\alpha > 0$. Предельный случай $\lambda \equiv \text{const}$, $M \leq c_3 \log \frac{1}{1-r}$ хорошо известен.

Теорема 2. Пусть φ — выпуклая функция, φ''/φ'^2 ограничена и $-\chi'''/|\chi''| \leq \theta$, где χ — функция, обратная к функции φ , и θ — число, $\theta < 1$.

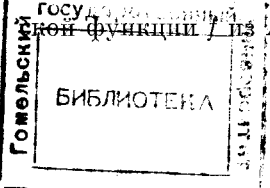
1) Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) > 0$, то существуют функция u , $u \in h(\lambda)$, и постоянная $c_4, c_4 > 0$, такие, что $\max_{|\zeta|=r} |(\Gamma u)(\zeta)| \geq c_4 \lambda(r)$, $r \geq r_4$;

2) Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi' = 0$, но $\inf_{t \geq 0} \varphi'(t)t > 0$, то существуют $u, u \in h(\lambda)$, и $c_5, c_5 > 0$, такие, что $\max_{|\zeta|=r} |(\Gamma u)(\zeta)| \geq c_5 \lambda(r)/\varphi'\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$;

3) Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t)t = 0$, то существуют $u, u \in h(\lambda)$, и $c_6, c_6 > 0$, такие, что $\max_{|\zeta|=r} |(\Gamma u)(\zeta)| \geq c_6 \lambda(r) \log \frac{1}{1-r}$, $r \geq r_6$.

Замечания, подобные сделанным после теоремы 1, можно отнести и к теореме 2.

3. Теоремы об оценке нижней грани гармонической функции. Всюду далее принято обозначение $\psi = \log \varphi$; предполагается также, что существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi'(t)$. Характер оценки снизу аналитической функции f из $A(D, \lambda)$ или $A(\Pi, \lambda_\Pi)$ существенно зависит от величин



ны этого предела. Поэтому мы различаем случаи * $\lim \psi' = +\infty$ и $1 \leq \lim \psi' < \infty$

Теорема 3. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi' = +\infty$, $f \in A(\Pi, \lambda_\Pi)$.

1) Если функция $1/\sqrt{\psi'}$ выпукла, то для любого τ , $|\tau| < 1/2\pi$,

$$T(f) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty}^{\text{def}} \frac{\log |f(\sigma + i\tau)|}{\varphi(\sigma)} \geq -1; \quad (1)$$

2) Если функции $1/\sqrt{\psi'}$ и ψ''/ψ' выпуклы **, то для любого τ , $|\tau| < 1/2\pi$.

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon(\sigma)} \left(\frac{\log |f(\sigma + i\tau)|}{\varphi(\sigma)} + 1 \right) > -\infty, \quad (2)$$

$$\text{где } \varepsilon(\sigma) = \varepsilon_\Pi(\sigma) \equiv \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi''}{\psi'^3} dt + \frac{\psi''(\sigma)}{[\psi'(\sigma)]^2}.$$

Замечания. 1) Сделав некоторые дополнительные предположения о «правильности» роста функции ψ , можно показать, что *** $\varepsilon_\Pi(\sigma) \asymp \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi''}{\psi'^3} dt$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Кроме того, для слабо растущих ψ' (таких, что ψ''/ψ' убывает) верно и $\varepsilon_\Pi(\sigma) \asymp \frac{\psi''(\sigma)}{[\psi'(\sigma)]^2}$, $\sigma \rightarrow +\infty$.

2) Аналог теоремы 3 справедлив и для функций из $A(D, \lambda)$. При тех же условиях на ψ неравенство (1) перейдет в

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{\log |f(r\xi)|}{\log \lambda(r)} \geq -1, \quad (1')$$

а неравенство (2) в

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{\varepsilon_D \left(\log \frac{1}{1-r} \right)} \left(\frac{\log |f(r\xi)|}{\log \lambda(r)} + 1 \right) > -\infty, \quad (2')$$

$$\text{где } \varepsilon_D(\sigma) = \max \left(\varepsilon_\Pi(\sigma), \frac{1}{\psi'(\sigma)} \right).$$

3. При более жестких и специальных ограничениях на мажоранту φ (см., например, (8)) можно показать, что оценки теоремы 3 и замечания 3 точны в том смысле, что $\inf_{f \in A(\lambda)} T(f) = -1$, а в неравенствах (2) и (2')

функции ε_Π и ε_D нельзя заменить, вообще говоря, на $\tilde{\varepsilon}_\Pi$, $\tilde{\varepsilon}_D$, если $\tilde{\varepsilon}_\Pi = o(\varepsilon_\Pi)$, $\tilde{\varepsilon}_D = o(\varepsilon_D)$.

Теорема 4. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi' > 1$, $1/\sqrt{\psi'}$ — выпуклая функция.

1) Если $f \in A(\Pi, \lambda_\Pi)$, то для любого ε , $\varepsilon > 0$, существует постоянная $A = A_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|f(\sigma + i\tau)| \geq \exp(-A_\varepsilon \varphi(\sigma)) \text{ при } \sigma > \sigma_1, \quad |\tau| \leq 1/2\pi - \varepsilon;$$

2) Если $f \in A(D, \lambda)$, то существует $A > 0$ такое, что

$$|f(\xi)| \geq \exp(-A \log \lambda(|\xi|)),$$

т. е. $m_D(r) \geq \exp(-A \log \lambda(r))$.

Теорема 5. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi' = 1$.

1) Если $f \in A(\Pi, \lambda_\Pi)$, то для любого ε , $\varepsilon > 0$, существует постоянная $B_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|f(\sigma + i\tau)| \geq \exp \left(-B_\varepsilon e^\sigma \int_0^\sigma \varphi(t) e^{-t} dt \right), \quad \sigma > \sigma_2, \quad |\tau| \leq 1/2\pi - \varepsilon;$$

* Случай $\lim \psi' < 1$ неинтересен, потому что здесь $\psi \leq ct$, $c < 1$, при $t > t_0$ и наилучшей минорантой в круге будет $\exp(-K/(1-r))$, а в полосе $\exp(-Ke^0)$.

** Допускаются любые комбинации знаков выпуклости этих функций, совместимые с ростом ψ .

*** $F \asymp G$ означает, что $F = O(G)$ и $G = O(F)$.

2) Если $\gamma, \gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \log \varphi(t) e^{-t} = \psi(t) - t$ — выпуклая функция (любого знака), то существуют функции $f, f \in A(\Pi, \lambda_\Pi)$, и число $c_7, c_7 > 0$, такие, что

$$|f(\sigma)| \leq \exp \left(-c_7 e^\sigma \int_0^\sigma \varphi(t) e^{-t} dt \right), \quad \sigma > \sigma_3.$$

Замечания. 1) $B_\varepsilon = O(e^{\text{const}/\varepsilon})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2) Можно сделать явной зависимость роста функции $1/m_\Pi$ от поведения φ . Например, $\Delta \asymp \varphi \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\psi' - 1) > 0$ и $\Delta \asymp e^\sigma \Leftrightarrow \int_0^\infty \varphi(t) e^{-t} dt < \infty^*$.

Теорема 6. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi' = 1$, $\gamma(t) \equiv \psi(t) - t$ и выполнено одно из следующих условий: I) $\gamma' > 0$ и функции $1/\gamma'$ и $\gamma'(t)t^2$ выпуклы **; II) $\gamma' < 0$, $\gamma' \uparrow 0$.

Тогда

1) Существует постоянная $c_8, c_8 > 0$, такая, что при $r > r_8$;

$$m_D(r) \geq \exp \left[-\frac{c_8}{1-r} \left(\int_0^{\log 1/(1-r)} V \sqrt{\varphi(t) e^{-t}} dt \right)^2 \right] \equiv \exp \left[-\frac{c_8}{1-r} \left(\int_0^r \sqrt{\frac{\log \lambda(u)}{1-u}} du \right)^2 \right];$$

2) Если $\inf_{t \geq 0} t\gamma'(t) > -\infty$, то существуют функции $f, f \in A(D, \lambda)$, и постоянная $c_9, c_9 > 0$, такие, что

$$|f(r)| \leq \exp \left(-\frac{c_9}{1-r} \left(\int_0^r \sqrt{\frac{\log \lambda(u)}{1-u}} du \right)^2 \right), \quad r_9 \leq r < 1.$$

Замечания. 1) Если $\lim_{t \rightarrow \infty} t\gamma'(t) < -2$, то $\int_0^\infty V \sqrt{\varphi(t) e^{-t}} dt < \infty$, и «наилучшей» минорантой в классе $A(D, \lambda)$, очевидно, будет $\exp(-K/(1-r))$, $0 \leq r < 1$.

2) Для функции m_D также имеет место аналог замечания 2 к теореме 5. В частности, $\log \frac{1}{m_D(r)} \asymp \frac{1}{1-r} \Leftrightarrow \int_0^\infty V \sqrt{\varphi(t) e^{-t}} dt < \infty$ (ср. (3)).

При доказательстве утверждений этого параграфа используется одно уточнение асимптотической формулы С. Варшавского для конформных отображений бесконечных полос, которое может представить и самостоятельный интерес.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ M. Cartwright, Quart. J. Math., 4, № 16, 246 (1933). ² M. Cartwright, Quart. J. Math., 6, 95 (1935). ³ C. N. Linden, Proc. Cambr. Phil. Soc., 52, № 1, 49 (1956). ⁴ C. N. Linden, Quart. J. Math., 7, № 27, 196 (1956). ⁵ W. K. Науман, Proc. London Math. Soc., 11, № 8, 469 (1952). ⁶ А. Л. Шагинян, Изв. АН АрмССР, Физ.-матем. науки, 12, № 1, 3 (1959). ⁷ В. С. Захарян, Матем. сборн., 63 (105), № 1, 3 (1964). ⁸ Н. К. Никольский, Изв. АН АрмССР, Математика, 6, № 3—4 (1971). ⁹ В. И. Мацаев, ДАН, 132, № 2, 283 (1960); 154, № 5, 1034 (1964).

* При сделанных в теореме предположениях правильности роста.

** См. примечание к пункту 2 теоремы 3.