

УДК 517.514

МАТЕМАТИКА

А. И. ОКСАК

ОДНОРОДНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 10 XII 1971)

В статье рассматриваются вопросы, связанные с однородными обобщенными функциями (о.о.ф.) в n -мерном вещественном евклидовом пространстве R_n и в $\dot{R}_n := R_n \setminus \{0\}$ (т. е. в R_n с выколотым нулем). При этом преследовалась цель построения для о.о.ф. достаточно простого аппарата, максимально удовлетворяющего требованию явной инвариантности относительно группы $GL(n, R)$ всех линейных невырожденных преобразований R_n . Основное внимание уделено вопросам продолжения о.о.ф. в $\dot{R}_n$ до о.о.ф. в R_n (поскольку к ним часто сводятся практические трудности задания о.о.ф. в R_n). Соответствующий критерий продолжимости был получен ранее в ^(1, 2), где был развит метод регуляризации однородных функций. Ниже на основе различных представлений для о.о.ф. в $\dot{R}_n$ (см. лемму и предложение) приведены другие формы критерия продолжимости о.о.ф. Φ в $\dot{R}_n$ до о.о.ф. Φ в R_n (см. теоремы 1 и 1'), а также дано удобное для приложений представление (2), выражающее Φ через Φ . При дополнительном предположении, что Φ инвариантна (или в более общей форме, что семейство о.о.ф. в $\dot{R}_n$ ковариантно) относительно подгруппы $G \subset GL(n, R)$, рассмотрена проблема существования G -инвариантного (или G -ковариантного) продолжения в R_n . В заключительной части работы известный метод аналитического продолжения о.о.ф. ⁽¹⁾ трактуется как метод построения о.о.ф. в R_n из семейства о.о.ф. в $\dot{R}_n$, зависящих от параметра.

1°. Введем основные обозначения и определения. N — множество всех целых неотрицательных чисел; P — мультипликативная группа всех вещественных положительных чисел; $\hat{P} := \{r \in P \mid r \geq 0\}$; C_n — n -мерное комплексное евклидово пространство. Пусть Ω обозначает одно из многообразий $P, \hat{P}, \dot{R}_n, R_n$. Для любого $c \in C_1$ посредством условия однородности $T(\rho x) = \rho^{c - \frac{1}{2}n} T(x)$ ($\forall \rho \in P, n$ — размерность Ω) выделим подпространство $\mathfrak{D}_c(\Omega)$ пространства $\mathcal{S}(\Omega)$ (в стандартной топологии ⁽³⁾) всех C^∞ -функций в Ω и подпространство $d_c(\Omega)$ пространства Шварца ⁽³⁾ $D'(\Omega)$ обобщенных функций в Ω . Далее, $\mathfrak{P}_c(\dot{R}_n)$ — подпространство всех полиномиальных функций из $\mathfrak{D}_c(\dot{R}_n)$ и $Q_c(R_n)$ — подпространство всех о.о.ф. из $d_c(R_n)$ с носителями в нуле. Ясно, что $\mathfrak{P}_{-c}(\dot{R}_n)$ и $Q_c(R_n)$ отличны от нуля лишь при $-(c + \frac{1}{2}n) \in N$.

Хорошо известно ⁽¹⁾, что при любом $c \in C_1$ пространства $d_c(P)$ и $d_c(\hat{P})$ одномерны. Именно, $d_c(P)$ порождается гладкой функцией $i_c(\rho) := \rho^{c - \frac{1}{2}}$, а $d_c(\hat{P})$ порождается о.о.ф. j_c , определяемой следующим образом. При $\operatorname{Re} c > \frac{1}{2}$ $j_c(r) := (\Gamma(c + \frac{1}{2}))^{-1} r^{c - \frac{1}{2}}$ есть непрерывная функция от r , причем $\langle j_c(r), f(r) \rangle = \langle j_{c+1}(r), -\frac{d}{dr} f(r) \rangle$ для любой основной функции $f \in D(\hat{P})$; это тождество позволяет доопределить j_c для всех c как о.о.ф. в $\hat{P}$, зависящую от c как от параметра аналитическим образом. В частности, при $-(c + \frac{1}{2}) = l \in N$ $j_c(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^l \delta(r)$, где

$\langle \delta, f \rangle := f(0)$. Далее, для любого c определим $\hat{i}_c \in D'(\hat{P})$ равенствами $\hat{i}_c = \Gamma(c + 1/2)j_c$ при $-(c + 1/2) \notin N$ и $i_c = (-1)^l(l!)^{-1} \frac{\partial}{\partial c} j_c$ при $-(c + 1/2) = l \in N$. Легко видеть, что сужение $\hat{i}_c$ на P совпадает с i_c и что при $-(c + 1/2) \notin N$ $i_c \in d_c(P)$, а при $-(c + 1/2) = l \in N$ $\hat{i}_c$ есть так называемая присоединенная о.о.ф. первого рода, поскольку $\hat{i}_c(\rho r) = i_c(\rho) \{i_c(r) + (-1)^l(l!)^{-1} \ln \rho \cdot j_c(r)\} \quad \forall \rho \in P$.

Наконец, введем (зависящие от n и c) непрерывные операторы $\mathcal{I}_c, \mathcal{J}_c$ и $\hat{\mathcal{I}}_c$, удобные для изучения пространств $d_c(\hat{R}_n)$ и $d_c(R_n)$:

$$\mathcal{I}_c: D(\hat{R}_n) \rightarrow \mathfrak{D}_c(\hat{R}_n), \quad (\mathcal{I}_c F)(x) := \int_P \rho^{-c+1/2n} F(\rho x) \rho^{-1} d\rho; \quad (1a)$$

$$\mathcal{J}_c: D(R_n) \rightarrow \mathfrak{D}_c(\hat{R}_n), \quad (\mathcal{J}_c F)(x) := \langle j_{c'}(r), F(rx) \rangle_r; \quad (1b)$$

$$\hat{\mathcal{I}}_c: D(R_n) \rightarrow \mathcal{E}(\hat{R}_n), \quad (\hat{\mathcal{I}}_c F)(x) := \langle \hat{i}_{c'}(r), F(rx) \rangle_r, \quad (1b)$$

где $c' = -c + 1/2(n-1)$. Правые части в (1б) и (1в) понимаются как значения обобщенных функций по r на основной $F(rx) \in D(\hat{P})$, зависящей C^∞ -образом от параметра $x \in \hat{R}_n$. Образы операторов $\mathcal{I}_c, \mathcal{J}_c$ при любом c и оператора $\hat{\mathcal{I}}_c$ при $(c - 1/2n) \notin N$ содержатся в $\mathfrak{D}_c(\hat{R}_n)$, что вытекает из однородности соответствующих $i_c, j_{c'}$ и $\hat{i}_c$. При $(c - 1/2n) = l \in N$ образ $\mathcal{J}_c$ совпадает с $\mathfrak{P}_c(\hat{R}_n)$, а образ $\hat{\mathcal{I}}_c$ содержит наряду с однородными присоединенными однородными функциями первого рода, поскольку $(\hat{\mathcal{I}}_c F)(\rho x) = \rho^{c-1/2n} \{(\hat{\mathcal{I}}_c F)(x) + (-1)^l(l!)^{-1} \ln \rho \cdot (\mathcal{J}_c F)(x)\}$ при $\forall x \in P$. Операторы $\mathcal{I}_c, \mathcal{J}_c, \hat{\mathcal{I}}_c$ очевидно, обладают важным свойством $GL(n, R)$ -инвариантности; так, $\mathcal{I}_c(F_A) = (\mathcal{I}_c F)_A$ при любых $F \in D(\hat{R}_n)$, $A \in GL(n, R)$, где $F_A(x) := F(A^{-1}x)$.

2°. В терминах введенных выше операторов легко решается задача продолжения о.о.ф. в $\hat{R}_n$ до о.о.ф. в R_n .

Лемма. Для любых $\Phi \in d_c(\hat{R}_n)$, $F \in D(\hat{R}_n)$ и функции $H \in D(\hat{R}_n)$, такой, что $\int_P H(\rho x) \rho^{-1} d\rho = 1$ при всех $x \in \hat{R}_n$, имеет место $\langle \Phi(x), F(x) \rangle = \langle \Phi(x), H(x) \cdot (\mathcal{I}_{-c} F)(x) \rangle$.

Теорема 1. Фиксируем (произвольным образом) функцию $H \in D(\hat{R}_n)$, удовлетворяющую условию $\int_P H(\rho x) \rho^{-1} d\rho = 1$ при всех $x \in \hat{R}_n$, и сопоставим всякой о.о.ф. $\Phi \in d_c(\hat{R}_n)$ ее продолжение $\hat{\Phi} \in D'(R_n)$ по формуле

$$\langle \hat{\Phi}(x), F(x) \rangle = \langle \Phi(x), H(x) \cdot (\mathcal{I}_{-c} F)(x) \rangle \quad \forall F \in D(R_n). \quad (2)$$

О.о.ф. $\Phi \in d_c(\hat{R}_n)$ обладает продолжением до о.о.ф. из $d_c(R_n)$ тогда и только тогда, когда $\langle \Phi(x), H(x) \cdot p(x) \rangle = 0$ при любых $p \in \mathfrak{P}_{-c}(\hat{R}_n)$. При выполнении этого условия формула (2) определяет продолжение Φ до о.о.ф. $\hat{\Phi} \in d_c(R_n)$, а общий вид таких продолжений есть $\hat{\Phi} + q$ с любым $q \in Q_c(R_n)$. В частности, если $-(c + 1/2n) \notin N$, то для любой $\Phi \in d_c(\hat{R}_n)$ однородное (той же степени) продолжение в R_n существует, единственно и совпадает с $\hat{\Phi}$ (которая, следовательно, не зависит от выбора H).

3°. Для переформулировки в $GL(n, R)$ -инвариантных терминах (без использования функции H) критерия продолжимости о.о.ф. $\Phi \in d_c(\hat{R}_n)$ в R_n оказывается полезным следующее предложение об операторах $\mathcal{I}_c$ и их сопряженных $\mathcal{I}_c'$. Будем для определенности считать, что $D'(\hat{R}_n)$ и $\mathfrak{D}_c'(\hat{R}_n)$ наделены слабыми топологиями.

Предложение *. а) Оператор $\mathcal{I}_c: D(\dot{R}_n) \rightarrow \mathfrak{D}_c(\dot{R}_n)$ есть сюръективный топологический гомоморфизм.

б) Оператор $\mathcal{I}_c': \mathfrak{D}_c'(\dot{R}_n) \rightarrow D'(\dot{R}_n)$ есть топологический изоморфизм пространства $\mathfrak{D}_c'(\dot{R}_n)$ на подпространство $d_{-c}(\dot{R}_n) \subset D'(\dot{R}_n)$.

Приводимая ниже теорема 1' является изложением части теоремы 1 в чисто инвариантных терминах. При этом отобраны лишь те пункты, которые допускают подобную переформулировку, поэтому в теореме 1' не содержится явный вид продолжений о.о.ф. из $d_c(\dot{R}_n)$ до о.о.ф. из $d_c(R_n)$ при $-(c + 1/2n) \in N$.

Теорема 1' (явно инвариантная часть теоремы 1). Пусть Φ — о.о.ф. из $d_c(\dot{R}_n)$ и $\varphi := (\mathcal{I}_{-c}')^{-1}\Phi$ — соответствующий функционал из $\mathfrak{D}_{-c}'(\dot{R}_n)$ (где $\mathcal{I}_{-c}'$ — установленный выше изоморфизм $\mathfrak{D}_{-c}'(\dot{R}_n)$ на $d_c(\dot{R}_n)$).

I) Если $-(c + 1/2n) \notin N$, то Φ обладает единственным продолжением до о.о.ф. из $d_c(R_n)$, равным $\hat{\Phi} = \hat{\mathcal{I}}_{-c}'\varphi$ или, эквивалентно, $\langle \hat{\Phi}, F \rangle = (\varphi, \mathcal{I}_{-c}F) \quad \forall F \in D(R_n)$.

II) Если $-(c + 1/2n) \in N$, то Φ обладает продолжением до о.о.ф. из $d_c(R_n)$ тогда и только тогда, когда φ исчезает на $\mathfrak{P}_{-c}(\dot{R}_n)$.

4°. Обратимся к важному для приложений вопросу о продолжении о.о.ф., ковариантных (в частности, инвариантных) относительно подгруппы $G \subset GL(n, R)$. Пусть $\tau := (\tau_{ij})$ — комплексное m -мерное (матричное) представление подгруппы G . Для всякого подпространства $\mathfrak{A} \subset d_c(\Omega)$ (где Ω есть $\dot{R}_n$ или R_n) посредством $\mathfrak{A}^\tau$ будем обозначать пространство (τ -ковариантных) семейств $\mathcal{F} := (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ таких, что $\Phi_i \in \mathfrak{A}$ и $\Phi_i(A^{-1}x) = \sum_j \tau_{ji}(A)\Phi_j(x)$ при всех $i = 1, \dots, m$ и $A \in G$. Нас интере-

суют условия, при которых элементы семейства $\mathcal{F} \in d_c^\tau(\dot{R}_n)$ можно продолжить в R_n так, чтобы продолжения образовали семейство $\hat{\mathcal{F}} \in d_c^\tau(R_n)$. Легко видеть, что в данной задаче пространства $d_c(\dot{R}_n)$ и $d_c(R_n)$ можно без существенной потери общности заменить их подпространствами $d_{c,\varepsilon}(\dot{R}_n)$ и $d_{c,\varepsilon}(R_n)$, состоящими из о.о.ф. с определенной четностью $\varepsilon = \pm$ (т. е. из о.о.ф. Φ таких, что $\Phi(-x) = \varepsilon\Phi(x)$).

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F} := (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ есть τ -ковариантное семейство из $d_{c,\varepsilon}^\tau(\dot{R}_n)$, где τ — представление подгруппы $G \subset GL(n, R)$, и пусть σ есть 0 или 1 в соответствии с формулой $\varepsilon(-1)^\sigma = 1$.

I) Если $-1/2(c + 1/2n + \sigma) \notin N$, то существует и единственно семейство $\mathcal{F} := (\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_m) \in d_{c,\varepsilon}^\tau(R_n)$, состоящее из продолжений Φ_i в R_n .

II) Пусть $-1/2(c + 1/2n + \sigma) \in N$ и подгруппа G обладает свойством тривиальности всякой одномерной группы когомологий $H^1(G, V)$, ассоциированной с представлением G в произвольном комплексном конечномерном векторном пространстве V . При этих условиях семейство $\hat{\mathcal{F}} \in d_{c,\varepsilon}^\tau(R_n)$, состоящее из продолжений Φ_i в R_n , существует тогда и только тогда, когда для любого τ' -ковариантного семейства $(p_1, \dots, p_m) \in \mathfrak{P}_{-c'}(\dot{R}_n)$ (где τ' — представление, сопряженное к τ , т. е. такое, что $\tau'_{ij}(A) = \tau_{ji}(A^{-1})$) G -инвариантная о.о.ф. $\sum_i p_i(x) \cdot \Phi_i(x)$ из $d_{-n/2}(\dot{R}_n)$ обладает однородным продолжением в R_n , т. е. (в обозначениях теорем 1 и 1') $\sum_i \langle \Phi_i, H \cdot p_i \rangle \equiv \sum_i (\Phi_i, p_i) = 0$. Неединственность искомого продолжения, очевидно, характеризуется размерностью пространства $\mathfrak{D}_{-c'}^\tau(R_n)$.

Отметим, что условие на группу G (сформулированное в виде, наиболее приспособленном к доказательству), наложенное в части II) теоремы 2,

* Ср. Дополнение А в (4), где содержится комплексный аналог о комплексно однородных (обобщенных) функциях в $C_n \setminus \{0\}$.

есть не что иное, как требование полной приводимости ⁽⁵⁾ всех комплексных конечномерных представлений группы G . В частности, это условие выполнено, если G компактна или является связной полупростой группой Ли. Заметим также, что в случае I) (и в случае II) для компактной G) для искомых продолжений $\mathcal{F}$ нетрудно получить явную формулу типа (2) с заменой $\mathcal{F}_{-c}$ некоторым оператором $\mathcal{F}_{-c, \epsilon}$ (соответственно некоторой $(m \times m)$ -матрицей операторов $\mathcal{F}_{-c, \epsilon}^{\tau}(p_i) = 0$, причем H выбирается четной и G -инвариантной).

5°. Рассмотрим вариант метода аналитического продолжения, позволяющий конструировать о.о.ф. в R_n из заданного семейства о.о.ф. в $\mathring{R}_n$. Из теоремы 1 следует, что при $-(c + \frac{1}{2}n) \in N$ однородное продолжение элемента $\Phi \in d_c(\mathring{R}_n)$ в R_n (если существует, то) не единственно. Тем не менее для семейства $\{\Phi_c\} \subset D'(\mathring{R}_n)$ о.о.ф., аналитически зависящих от параметра $c \in C_1$ и удовлетворяющих условию $\Phi_c \in d_c(\mathring{R}_n)$, можно указать одно естественное среди различных однородных продолжений. С этой целью семейству $\{\Phi_c\}$ сопоставим семейство $\{\Psi_c\}$ о.о.ф. в R_n , которые определены (в обозначениях теоремы 1) посредством $\langle \Psi_c, F \rangle = \langle \Phi_c, H \cdot (\mathcal{F}_{-c}F) \rangle$, не зависят от H , аналитически зависят от c и удовлетворяют условию $\Psi_c \in d_c(R_n)$. Нетрудно убедиться, что если при некотором $-(c + \frac{1}{2}n) = l \in N$ Φ_c обладает однородным продолжением в R_n , т. е.

если $\Psi_c = 0$, то формула $\hat{\Phi} = (-1)^l (l!)^{-1} \frac{\partial}{\partial c} \Psi_c$ доставляет одно из таких продолжений (причем $\hat{\Phi}$ наследует те свойства инвариантности или ковариантности, которыми, возможно, обладают элементы семейства $\{\Phi_c\}$). Вообще дифференцирование Ψ_c по параметру может использоваться для получения нетривиальных о.о.ф. из $d_c(R_n)$ при тех значениях c , при которых $\Psi_c = 0$; для этого достаточно взять первую не исчезающую производную от Ψ_c по c .

Метод дифференцирования по параметру с целью получения новых о.о.ф. обобщается на раздельно однородные обобщенные функции от нескольких групп переменных. Пусть $c = (c_1, \dots, c_k) \in C_k$; d_c — подпространство в $D'(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_k)$ (где Ω_j есть $\mathring{R}_{n_j}$ или R_{n_j}) обобщенных функций $\Psi(x_1, \dots, x_k)$, удовлетворяющих условию однородности по x_j при $c = c_j$, $n = n_j$, $j = 1, \dots, k$. Пусть $\{\Psi_c\}$ — семейство обобщенных функций, аналитически зависящих от параметра c и таких, что $\Psi_c \in d_c$. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial c}\right) \Psi_c \in d_c$ (где $\mathcal{P}$ — комплексный полином от k переменных) тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}^{(\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial c}\right) \Psi_c = 0$ для любых ненулевых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in N_k \setminus \{0\}$; здесь $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ обозначает полином $\mathcal{P}^{(\alpha)}(z) = \prod_j \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{\alpha_j} \mathcal{P}(z)$. Всякую о.о.ф. из d_c вида $\mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial c}\right) \Psi_c$ естественно назвать ассоциированной с семейством $\{\Psi_c\}$; таковыми являются многие часто встречающиеся в приложениях о.о.ф.

Институт физики высоких энергий
Серпухов Моск. обл.

Поступило
14 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев, Обобщенные функции, в. 1, М., 1959.
² И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленин, Обобщенные функции, в. 5, М., 1962. ³ L. Schwartz, Théorie des distributions, Paris, 1950/51. ⁴ A. I. Oksak, I. T. Todorov, Commun. Math. Phys., 14, 271 (1969). ⁵ Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, М., 1962.