Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

В. Н. ПАВЛЕНКО

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 XII 1971)

1. В данной работе вариационным методом устанавливаются предложения о разрешимости уравнений вида

$$x = BF(x), \tag{1}$$

$$Bx = F(Cx), \tag{2}$$

где F — нелинейный оператор из банахова пространства E в сопряженное пространство E^*; в уравнении (1) B — линейный оператор из E^* в E, в уравнении (2) B — линейный оператор из E в E^*, а C — линейный оператор из E в E.

Уравнение вида (1) было впервые изучено вариационным методом в работах [1, 2], где предполагалось, что F — непрерывный оператор из пространства Лебега L^2 в себя и B — вполне непрерывный оператор из L^2 в пространство непрерывных функций; эти ограничения были существенно использованы авторами [1, 2] при доказательстве различных теорем. Дальнейшее развитие вариационный метод исследования уравнения (1) получил в работах М. М. Вайнберга, Я. Л. Энгельсона, И. М. Лаврентьева и других авторов.

В работах [3, 4] был изучен случай, когда F — непрерывный оператор из пространства Лебега L^p, $p > 1$, в сопряженное пространство L^q, а B — ограниченный оператор из L^q в L^p. Наконец, в работах [5–7] были установлены предложения об уравнении (1) без предположения об ограниченности оператора B.

Основное отличие данного исследования от перечисленных и других работ заключается в том, что здесь не предполагается непрерывность оператора F, а в некоторых предложениях не предполагается и потенциальность F.

2. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что E — вещественное рефлексивное банахово пространство, удовлетворяющее следующим условиям: 1) существует гильбертово пространство H такое, что $E \subset H \subset E^*$, причем $\|x\|_{E^*} \leqslant a\|x\|_H$ $\forall x \in H$ и $\|x\|_H \leqslant b\|x\|_E$ $\forall x \in E$; 2) $\overline{H} = E^*$; 3) $\langle x, y\rangle = (x, y)$ для любых $x \in E$ и $y \in H$, где $\langle x, y\rangle$ — значение линейного функционала $y \in E^*$ на векторе $x \in E$ и (x, y) — скалярное произведение.

3. Здесь мы рассмотрим уравнение (1) в предположении, что B — самосопряженный вполне непрерывный оператор из E^* в E.

Определение 1. Оператор $F: E \to E^*$ назовем *h-полунепрерывным справа в точке* x_0, если

$$\varliminf_{t\to 0+} \langle h, F(x_0 + th) - F(x_0)\rangle \geqslant 0.$$

Определение 2. Оператор $F: E \to E^*$ назовем *хемиограниченным*, если для $\forall x$, $h \in E$ и $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\|F(x + th)\| \leqslant C(x, h).$$

Определение 3. Скажем, что оператор F: $E \to E^*$ удовлетворяет условию (α), если существует непрерывный функционал f такой, что

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \langle h, F(x+th)\rangle\, dt.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1) *B — вполне непрерывный положительный оператор;* 2) *оператор F хемиограничен, h-полунепрерывен справа;* 3) *F обладает свойством* (α), *причем*

$$f(x) \leqslant a(x, x) + b(x, x)^\gamma + c \quad \forall x \in E,$$
$$b \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < a\|B^H\| < 2^{-1}$$

где B^H — сужение B на H.

Тогда уравнение (1) *разрешимо.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:* 1) *B — вполне непрерывный оператор, сужение которого B^H — квазиотрицательный* ([4]) *оператор, положительный спектр которого принадлежит отрезку* $[m, \beta]$, *где* $m > 0$; 2) *оператор $-F$ хемиограничен, h-полунепрерывен справа и радиально измерим;* 3) *F удовлетворяет условию* (α), *причем*

$$f(x) \geqslant \frac{1}{m}(x, x) + b(x, x)^\gamma + c \quad \forall x \in E,$$

где $b < 0, c < 0, 0 < \gamma < 1$.

Тогда уравнение (1) *разрешимо.*

4. Теорема 3. *Пусть выполнены условия:* 1) *B — линейный оператор из E в E^*, имеющий ограниченный обратный, причем $R(B) = E^*$;* 2) *C — линейный оператор из E в E, ограниченность которого не предполагается;* 3) *оператор $A = CB^{-1}$ удовлетворяет одному из следующих требований: либо он вполне непрерывный и положительный, а F удовлетворяет условиям теоремы* 1, *где B^H заменено на A^H, либо он вполне непрерывен и A^H квазиотрицателен, а F удовлетворяет условиям теоремы* 2, *где B^H заменено на A^H.*

Тогда уравнение (2) *разрешимо.*

5. Здесь не предполагается полная непрерывность оператора B.

Определение 5. Скажем, что x_0 — регулярная точка разрыва оператора $\Phi(x)$, действующего в H, если существует единичный вектор $h = h(x_0)$ такой, что $\lim\limits_{t\to 0+}(h, \Phi(x_0 + th)) < 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:* 1) *B — положительный ограниченный оператор;* 2) *F удовлетворяет условию* (α), *причем*

$$2f(x) \leqslant a(x, x) + b(x, x)^\gamma + c \quad \forall x \in E$$
$$0 < a\|B^H\| < 1, \quad b \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad 0 < \gamma < 1;$$

3) $\{x - y,\ F(x) - F(y)\} \leqslant \dfrac{1}{\|B^H\|}\|x - y\|_H^2 \quad \forall x, y \in E;$

4) *все точки разрыва оператора* $\Phi(x) = x - ((B^H)^{1/2})^* F((B^H)^{1/2} x)$ *регулярны.*

Тогда уравнение (1) *разрешимо.*

Теорема 5. *Пусть выполнены условия:* 1) *B — ограниченный оператор, сужение которого B^H квазиположительно, отрицательный спектр которого принадлежит* $[\beta, m]$, *где* $m < 0$; 2) *F — антимонотонный оператор, удовлетворяющий условию* (α), *причем*

$$f(x) \leqslant \frac{1}{m}(x, x) + b(x, x)^\gamma + c \quad \forall x \in E,$$
$$b > 0, \quad c > 0, \quad 0 < \gamma < 1;$$

3) *все точки разрыва оператора* $\Phi(x) = (P_1 - P_2)x - A^*F(Ax)$ *регулярны.* P_1, P_2 — *операторы проектирования соответственно на положительное и отрицательное подпространства оператора* B^H, *а* $A = (B_+^H)^{1/2} + (B_-^H)^{1/2}$.

Тогда уравнение (1) *разрешимо.*

6. Применение теоремы 1 приводит к следующему предложению.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия:* 1) *Каждый интегральный оператор* A_i

$$A_i v = \int_B K_i(x, y) v(y) dy, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где B — *множество конечной меры* s-*мерного эвклидова пространства, положителен и вполне непрерывен из пространства* $L^q(B)$ *в* $L^p(B)$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$; 2) *Непрерывная вещественная функция вещественных аргументов* $G(u_1, \ldots, u_n)$ *такова, что для любых вещественных* u_i *и* h_i *функция* $G(u_1 + th_1, \ldots, u_n + th_n)$ *абсолютно непрерывна по* t *на отрезке* $[0, 1]$, *причем при фиксированных* u_i *и* h_i *для почти всех* $t \in [0, 1]$

$$\frac{d}{dt} G(u_1 + th_1, \ldots, u_n + th_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(u_1 + th_1, \ldots, u_n + th_n) h_i;$$

3) *Для любых измеримых на* B *функций* $u_i(x)$ *суперпозиции* $g_i(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ *измеримы по* x *на* B;

4) $|g_i(u_1, \ldots, u_n)| \leqslant a + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1}$, $a > 0$, $b > 0$, $u_k \in R^1$; 5) *Для любых* u_i, h_i *существует*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{i=1}^{n} h_i \left[g_i(u_1 + \varepsilon h_1, \ldots, u_n + \varepsilon h_n) - g_i(u_1, \ldots, u_n)\right] \geqslant 0;$$

6) $$2G(u_1, \ldots, u_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i |u_i|^\alpha + c,$$

где $0 \leqslant a_i < \lambda_{i1}$ (λ_{i1} — *наименьшее характеристическое число ядра* $K_i(x, y)$), $0 < \alpha < 2$, $b_i \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

Тогда система $u_i(x) = \int_B K_i(x, y) g_i(u_1(y), \ldots, u_n(y)) dy$ *разрешима.*

Отметим, что применение теорем 2—5 также приводит к новым предложениям для нелинейных интегральных уравнений.

7. Теоремы 1—5 могут быть применены и при изучении граничных задач для некоторых систем дифференциальных уравнений с частными производными. Приведем один пример системы со слабыми нелинейностями.

Пусть $\tau_i = \sum_{|j| \leqslant 2r_i} a_j^i(x) \partial^j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — формальные дифференциальные операторы четного порядка, определенные в области $\omega_0 \subset R^k$, и $\tau_i^* = \sum_{|j| \leqslant 2r_i} (-1)^{|j|} \partial^j a_j^i(x)$ - формально сопряженные к операторам τ_i, где $a_j^i(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции в ω_0. Будем предполагать, что τ_i удовлетворяют неравенствам

$$(-1)^{r_i} \sum_{|j| = 2r_i} a_j^i(x) \zeta^j > 0, \quad x \in \omega_0, \quad \zeta \in R^k, \quad \zeta \neq 0.$$

Пусть далее ω — ограниченная подобласть, замыкание которой содержится в ω_0. Предположим, что граница области ω является гладкой поверхностью S и что в S нет внутренних точек замыкания ω.

Рассмотрим граничную задачу

$$\tau_i u_i(x) = g_i(u_1(x), \ldots, u_n(x)), \; x \in \omega,$$

$$\partial_\nu^{p_i}(S) u_i(x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leqslant p_i \leqslant r_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $2r_i$ — порядок τ_i, а индекс ν означает, что производные берутся в направлении внутренней нормали к поверхности S.

Решением этой задачи называется функция $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x)) \in L_{2, n}(\omega)$ такая, что $\int\limits_\omega (\tau_i^* \eta) u_i(x)\, dx = \int\limits_\omega \eta g_i(u_1(x), \ldots, u_n(x))\, dx$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для любой функции $\eta(x) \in C^\infty(\bar{\omega})$, причем $\partial_\nu^{p_i}(S)\eta(x) = 0$, $x \in S$, $0 \leqslant p_i \leqslant r_i - 1$.

Теорема 7. *Пусть функции* $g_i(u_1, \ldots, u_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяют условиям* 2, 3, 4 и 5 *теоремы* 6 *с* $p = 2$ *и* τ_i — *самосопряженные* ($\tau_i^* = \tau_i$) *положительные операторы, спектры которых* $\sigma_i \not\ni 0$. *Пусть далее выполнено условие* 6) *теоремы* 6, *где* λ_{i1} — *точная нижняя грань* σ_i.

Тогда рассматриваемая граничная задача имеет решение.

Автор выражает благодарность М. М. Вайнбергу и И. М. Лаврентьеву за постановку задач и обсуждение.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Hammerstein, Acta Math., **54**, 117 (1930). [2] M. Golomb, Math. Zs., **39**, 45 (1934). [3] М. М. Вайнберг, ДАН, **92**, № 3, 457 (1953). [4] М. М. Вайнберг, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, 1956. [5] И. М. Лаврентьев, ДАН, **166**, № 2, 284 (1966). [6] М. И. Косицкий, ДАН, **190**, № 1, 31 (1970). [7] М. М. Вайнберг, И. М. Лаврентьев, ДАН, **187**, № 4, 711 (1969).