

Академик АН БССР С. А. ЧУНИХИН

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ПОДГРУППЫ ТОЧНОГО ПОРЯДКА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

1. Основной идеей ряда наших предыдущих работ было отыскание таких подгрупп конечной группы, порядки которых были бы произведениями определенных индексов некоторых заданных рядов подгрупп рассматриваемой группы. Так было, например, в основной теореме о π -разрешимых группах ⁽¹⁾ и в композиционно-блочной факторизации произвольных конечных групп ⁽²⁾, когда рассматривались композиционные ряды. В других случаях для этой же цели нами использовались определенные уплотнения инвариантных рядов (метод индексалов ⁽³⁾, нахождение сверхразрешимых ^(4, 5) и нильпотентных ⁽⁵⁾ подгрупп). В настоящей работе, примыкающей к ⁽³⁾, этим путем с использованием также и ⁽⁶⁾ получено еще несколько признаков существования нильпотентных и сверхразрешимых подгрупп у конечной группы.

2. Обозначения. Примарное число — степень простого числа (включая 1); $<$ — конечная последовательность некоторых натуральных чисел, $<F$ — множество F есть некоторая $<$; $< <$ — подпоследовательность, $F^* < < F$ — множество F^* есть $< <$ для $< F$; если $< F$, то F при F непустом обозначает произведение всех элементов F , а при F пустом равно 1; G — конечная группа порядка $|G|$, E — ее единичная подгруппа; бипримарная группа — группа, порядок которой делится точно на два различных простых числа; битриарная группа — группа, порядок которой делится не более чем на три различных простых числа; если $g \in G$, то $|g|$ — порядок g ; если T — ряд некоторых подгрупп группы G (не обязательно обрывающийся на E), то $\text{ind } T$ есть $<$ всех индексов этого ряда; $\text{ind } T$ назовем трассой ряда T ; инвариантный ряд (и.р.) подгрупп G — ряд, все члены которого инвариантны в G ; R : $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_v = E$, $v > 0$, — некоторый и.р. G ; $\{h_1, h_2, \dots, h_v\} = \text{ind } R$; H — некоторая $< <$ для $\text{ind } R$; уплотнение R_f ряда R (см. ⁽³⁾), R_f : $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_{\beta-1} \supseteq F_\beta \supseteq G_\beta \supseteq F_{\beta+1} \supseteq G_{\beta+1} \supseteq \dots \supseteq G_{v-1} \supseteq F_v = G_v = E$, $1 \leq \beta \leq v$, при помощи подгрупп F_i , $i = \beta, \dots, v$, назовем индексальным рядом G , если каждая F_i удовлетворяет «условию сопряженности»: всякая подгруппа из G_{i-1} , сопряженная с F_i в F_β , сопряжена с F_i уже в G_{i-1} ; если $|F_i/G_i| = f_i$, $i = \beta, \dots, v$, то $f_\beta f_{\beta+1} \dots f_v = h$ назовем индексалом группы G ; н.г. (н.п.) — нильпотентная группа (подгруппа); св.г. (св.п.) — сверхразрешимая группа (подгруппа); если A/B — фактор-группа, то A назовем ее числителем, а B — ее знаменателем; подгруппу F_i из F_β , $i = \beta, \dots, v$, назовем н. d -расширением (св. d -расширением) F_i в F_β , если F_i — инвариантная подгруппа $\tilde{F}_i$ и $\tilde{F}_i/F_i$ — н.г. (св.г.) порядка d ; группы Шмидта — минимальные не н.г. ⁽⁹⁾; $E(G, n, A, a)$ — G имеет н.п. A порядка a ; $E(G, n, a)$ — G имеет н.п. порядка a ; $|$ — начало доказательства, $\parallel$ — конец его; $\pi(m)$ — множество всех различных простых делителей натурального m .

3. Пусть m — натуральное число и F — подгруппа G . Если F не имеет н.р. у которого первый фактор не н.г. (не св. г.), порядок которой делит m , а все остальные факторы — н.г., то F назовем подгруппой типа $m(n)$ (типа $m(sr)$).

Отсюда, с учетом ряда $F \supseteq E$, следует $\mathcal{L}_1$: если F типа $m(n)$ (типа (sr)) и $|F|$ делит m , то F нильпотентна (сверхразрешима).

Если $\bar{H} > 1$, то пусть $\bar{H} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ — каноническое разложение числа $\bar{H}$. Пусть h_{j_i} — тот из делящих на p_i , $i = 1, \dots, t$, элементов H , у которого номер j_i наименьший, и пусть $p_i^{\beta_i}$ — порядок p_i -силовой подгруппы из G_{j_i-1} . Тогда пусть $\bar{H} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$. Если же $\bar{H} = 1$, то положим $\bar{H} = 1$. Число $\bar{H}$ назовем проекцией H на ряд R . Очевидно, $\bar{H}$ делит H .

Теорема 1. Если все бипримарные подгруппы группы G , порядки которых делят $\bar{H}$, типа $\bar{H}(n)$, то G имеет нильпотентную подгруппу порядка $\bar{H}$.

[Пусть G — контрпример наименьшего порядка к теореме 1. Тогда $\bar{H} > 1$, т. е. $|G| > 1$. Поэтому среди членов ряда R можно выбрать такой $G_\lambda = E$, что $G_{\lambda-1} \neq E$.

Покажем, что верно $\mathcal{L}_2$; все бипримарные подгруппы из $G/G_{\lambda-1}$, у которых порядки делят $\bar{H}/(\bar{H}, |G_{\lambda-1}|)$, типа $\bar{H}(n)$. Действительно, пусть $B/G_{\lambda-1}$ — контрпример подгруппы к $\mathcal{L}_2$. Применяя теорему 6 из ⁽³⁾ к индексалу $|B/G_{\lambda-1}| |E/E|$, получим подгруппу B_1 порядка $|B/G_{\lambda-1}|c$, где $c = |B_1 \cap G_{\lambda-1}|$, причем $\pi(c) \subseteq \pi(|B/G_{\lambda-1}|)$. $B_1 \cap G_{\lambda-1}$ — н.п. и $B = B_1 G_{\lambda-1}$. Тогда B_1 бипримарна и $|B_1|$ делит $\bar{H}$. Так как $B/G_{\lambda-1} \simeq B_1/B_1 \cap G_{\lambda-1}$ и $B/G_{\lambda-1}$ не типа $\bar{H}(n)$, то и $B_1/B_1 \cap G_{\lambda-1}$ тоже не типа $\bar{H}(n)$. Отсюда, ввиду нильпотентности $B_1 \cap G_{\lambda-1}$, видим, что B_1 не типа $\bar{H}(n)$. Противоречие.

1) $h_\lambda \notin H$. Тогда $H \ll \text{ind } R_1$, где $R_1 = G/G_{\lambda-1} \supseteq G_1/G_{\lambda-1} \supseteq \dots \supseteq G_{\lambda-1}/G_{\lambda-1}$, и проекция H на R_1 будет равна $\bar{H}/(\bar{H}, |G_{\lambda-1}|)$. Учитывая еще $\mathcal{L}_2$, видим, что условия теоремы 1 выполнены для $G/G_{\lambda-1}$ относительно H и $|G/G_{\lambda-1}| < |G|$. Поэтому $E(G/G_{\lambda-1}, n, B_2/G_{\lambda-1}, \bar{H})$. Тогда существует проходящий через $G_{\lambda-1}$ и.р. подгруппы B_2 , трасса ρ которого на участке от B_2 до $G_{\lambda-1}$ будет возрастающей последовательностью простых чисел (н.п.п.ч.), причем $\bar{\rho} = \bar{H}$. Отсюда по теореме 2 из ⁽⁵⁾ $E(B_2, n, \bar{H})$. Противоречие.

2) $h_\lambda \in H$. Теперь рассуждения из 1) можно применить к R_1 и $H \setminus \{h_\lambda\} \ll \text{ind } R_1$, учитывая, что проекция $H \setminus \{h_\lambda\}$ на R_1 равна $\bar{H}/(\bar{H}, |G_{\lambda-1}|)$ и $(\bar{H}, |G_{\lambda-1}|) = h_\lambda$. Получаем $E(G/G_{\lambda-1}, n, B_3/G_{\lambda-1}, \bar{H}/h_\lambda)$. Тогда $|B_3| = \bar{H}$. Отсюда с учетом $\mathcal{L}_1$ заключаем, что все бипримарные подгруппы B_3 нильпотентны. Тогда, по теореме 4.3.2 из ⁽⁷⁾, заключаем, что B_3 нильпотентна. Противоречие. ||

Очевидно, что частным случаем теоремы 1 является

Теорема 2. Если все бипримарные подгруппы группы G , порядки которых делят $\bar{H}$, нильпотентны, то G имеет нильпотентную подгруппу порядка $\bar{H}$.

Теорема 4.3.2 из ⁽⁷⁾ показывает, что эквивалентом теоремы 2 является Теорема 2'. Если группа G не содержит подгрупп Шмидта, порядки которых делят $\bar{H}$, то G имеет нильпотентную подгруппу порядка $\bar{H}$.

При $H = \text{ind } R$ теорема 1 превращается в критерий нильпотентности группы, полученный в ⁽⁶⁾.

Теорема 3. Если для любых двух отличных от единицы элементов g_1 и g_2 из G , порядки которых примарны по различным простым числам и делят H , выполняется условие $|g_1 g_2| = |g_1| \cdot |g_2|$, то G имеет нильпотентную подгруппу порядка $\bar{H}$.

[Покажем, что при выполнении условий теоремы 3 группа G не содержит никакой бипримарной не н.п., порядок которой делит $\bar{H}$.

Действительно, пусть A — такая подгруппа. Тогда A имеет не инвариантную силовскую подгруппу по крайней мере по одному из двух простых чисел, делящих $|A|$. Обозначим такое простое число через p_i . Тогда пусть p_j — второе простое число из $\pi(|A|)$. Тогда по p_i в группе A существуют различные силовские подгруппы P_i и P_i' . Пусть P_j будет p_j -силовской подгруппой A . Тогда $A = P_i P_j$, откуда в $P_i P_j$ и P_i' соответствен-

но найдутся элементы g_1, g_2 и $g_3 \notin P_i$, для которых $g_1 g_2 = g_3$, причем $|g_1|, |g_2|$ и $|g_3|$ делят, очевидно, $\bar{H}$. Противоречие. Мы видим, что для G выполнены условия теоремы 2. Поэтому $E(G, n, \bar{H})$. ||

Теорема 4. Если все битриарные подгруппы G , порядки которых делят $\bar{H}$, типа $\bar{H}(sr)$, то G имеет сверхразрешимую подгруппу порядка $\bar{H}$.

[Для доказательства теоремы 4 достаточно повторить доказательство теоремы 1, заменив в нем всюду, где используются условия или утверждения доказываемой теоремы, бипримарность на битриарность, тип $\bar{H}(n)$ — на тип $\bar{H}(sr)$, нильпотентность — на сверхразрешимость, н.п.п.ч. — на $<$ простых чисел; ссылки на теорему 2 из ⁽⁵⁾, на теорему 4.3.2 из ⁽⁷⁾ — соответственно ссылками на теорему 6 из ⁽⁸⁾ и на теорему 22 из ⁽⁹⁾.

Очевидно, что частным случаем теоремы 4 является

Теорема 5. Если все битриарные подгруппы G , порядки которых делят $\bar{H}$, сверхразрешимы, то G имеет сверхразрешимую подгруппу порядка $\bar{H}$.

4. Нам сейчас потребуется следующее построение, введенное в ⁽⁵⁾. Пусть индексальный ряд группы G на каждом своем участке от F_i до G_i , $i = \beta, \dots, \nu$, уплотнен некоторым начинающимся с F_i и заканчивающимся на G_i и.р. T_i группы F_i , и пусть Φ_i — некоторая $<<$ для $<$ всех факторов ряда T_i (Φ_i может быть и пустым). Пусть еще d_i есть $<$ порядков всех членов Φ_i . Числители и знаменатели всех фактор-групп из Φ_i образуют $<< D_i$ для T_i . Пусть $\Delta_i = D_\beta \cup D_{\beta+1} \cup \dots \cup D_i$ и $\delta_i = d_\beta \cup d_{\beta+1} \cup \dots \cup d_i$. Тогда Δ_i назовем вставкой типа δ_i ряда R_j . При $i = \nu$ положим $\Delta_\nu = \Delta$ и $\delta_\nu = \delta$. При $i < \nu$ можно Δ_i считать таким Δ , для которого все $d_j, j > i$, пусты.

Подобно тому, как мы для H образовали число $\bar{H}$, можно и для δ образовать его проекцию $\bar{\delta}$ на ряд R_j , уплотненный вставкой Δ .

Пусть Δ типа δ такова, что если $i > \beta$, то любая подгруппа из D_i инвариантна в любом н. δ_{i-1} -расширении (св. δ_{i-1} -расширении) подгруппы F_i в F_β . Тогда δ назовем n -трассой (sr -трассой) ряда R_j , уплотненного вставкой Δ .

Примеры таких трасс получаются, в частности, если при $i > \beta$ все подгруппы из D_i характеристические для F_i . Так, $f_\beta, f_{\beta+1}, \dots, f_\nu$ есть, очевидно, n -трасса и sr -трасса.

Если к определению n -трассы (sr -трассы) присоединить арифметическое условие определения 2 из ⁽⁵⁾, то получим нильпотентную (сверхразрешимую) последовательность индексала, введенную в ⁽⁵⁾. Так, например, если $P_1, P_2, \dots, P_\nu$ — произвольный набор силовских подгрупп простого порядка, взятых по одной у каждого фактора ряда R (некоторые из них могут быть единичными группами), и отличные от 1 члены в $|P_1|, |P_2|, \dots, |P_\nu|$ образуют н.п.п.ч., то она будет нильпотентной последовательностью и по теореме 3 из ⁽⁵⁾ G будет иметь нильпотентную подгруппу порядка $|P_1| |P_2| \dots |P_\nu|$. Заметим еще, что частными случаями теоремы 3 из ⁽⁵⁾ будут и теоремы 1—5 из ⁽⁴⁾.

Теорема 6. Теоремы 1, 3 и 4 остаются справедливыми, если в них заменить $\bar{H}$ и $\bar{H}$ соответственно на $\bar{\delta}$ и $\bar{\delta}$, причем в первых двух теоремах под $\bar{\delta}$ понимается n -трасса, а в последней — sr -трасса. При этом определяемая этими теоремами подгруппа входит в F_β .

[1] Докажем сначала справедливость теоремы 1 при указанной замене. Пусть G — контрпример наименьшего порядка к доказываемой теореме. Тогда $\bar{\delta} > 1$, т. е. $|G| > 1$. Поэтому в R имеется член $G_\lambda = E$, для которого $G_{\lambda-1} \neq E$ и $\bar{d}_j = 1$ при $j > \lambda$. При $\beta = \lambda$ будет $\bar{\delta} = \bar{d}_\beta$, где $\bar{d}_\beta = d_\lambda < < \text{ind } T_\lambda$. Тогда $\bar{\delta} = \bar{d}_\lambda$, откуда по теореме 1 $E(F_\lambda, n, \bar{\delta})$. Но $F_\lambda \subseteq F_\beta$. Противоречие. Значит, $\beta \leq \lambda - 1$. Пусть $R_2 : F_\beta \cong \dots \cong G_{\lambda-1}$ — участок ряда R_j , уплотненный вставкой $\Delta_{\lambda-1}$. Разлагая все члены R_2 по $G_{\lambda-1}$, получим ряд $R_3 : F_\beta / G_{\lambda-1} \cong \dots \cong G_{\lambda-1} / G_{\lambda-1}$.

Прямая проверка показывает, что верно $\mathcal{L}_3$: если R_2 имеет n -трассу $\delta_{\lambda-1}$, то $\delta_{\lambda-1}$ является n -трассой и для R_3 . Далее, для $F_\beta / G_{\lambda-1}$ доказывається, как и в теореме 1 (с соответствующими заменами), утверждение $\mathcal{L}_2$.

Пусть V — нормализатор F_λ в F_β . По лемме 2.2.1 из (7) $F_\beta = VG_{\lambda-1}$ и существует изоморфизм φ группы $F_\beta / G_{\lambda-1}$ на $V / V_{\lambda-1}$, где $V_{\lambda-1} = V \cap G_{\lambda-1}$. Применяя φ к членам ряда R_3 , получим и.р. $R_4: V / V_{\lambda-1} \cong \dots \cong V_{\lambda-1} / \bar{V}_{\lambda-1}$. Учитывая $\mathcal{L}_3$ и то, что φ — изоморфизм, заключаем, что R_4 имеет n -трассу $\delta_{\lambda-1}$ и что ее проекция на R_4 равна проекции $\delta_{\lambda-1}$ на R_3 , равной, как было уже отмечено, $\delta / (\delta, |G_{\lambda-1}|)$. Отсюда, с учетом еще $\mathcal{L}_2$, следует, что условия доказываемой теоремы выполняются для $V / V_{\lambda-1}$ относительно $\delta_{\lambda-1}$. Так как $F_\beta / G_{\lambda-1} \cong V / V_{\lambda-1}$ и $|G_{\lambda-1}| > 1$, то $|V / V_{\lambda-1}| < |G|$. Но тогда теорема верна для $V / V_{\lambda-1}$ относительно $\delta_{\lambda-1}$, т. е. $E(V / V_{\lambda-1}, n, N_1 / V_{\lambda-1}, \delta_{\lambda-1})$. Поэтому существует и.р. $N_1 \cong \dots \cong V_{\lambda-1} \cong F_\lambda \cong E$, трасса τ которого на участке от N_1 до $V_{\lambda-1}$ будет н.п.ч., причем $\bar{\tau} = \delta_{\lambda-1}$. Тогда τ будет и трассой ряда $N_1 / F_\lambda \cong \dots \cong V_{\lambda-1} / F_\lambda \cong F_\lambda / F_\lambda$ на участке от N_1 / F_λ до $V_{\lambda-1} / F_\lambda$. Отсюда, по теореме 2 из (5), следует $E(N_1 / F_\lambda, n, N_2 / F_\lambda, \delta_{\lambda-1})$. Тогда существует и.р. $R_5: N_2 \cong \dots \cong F_\lambda \cong E$, у которого на участке от N_2 до F_λ трассой будет τ . Уплотним ряд R_5 на участке от F_λ до E вставкой D_λ (если $F_\lambda = E$, то D_λ пусто) и получим ряд R_6 . Тогда $\tau \cup d_\lambda < \text{ind } R_6$ и проекция $\tau \cup \bar{d}_\lambda$ на R_6 , как нетрудно убедиться, делит δ . Так как δ есть n -трасса ряда R_f , то все подгруппы из D_λ инвариантны в N_2 . Тогда для $\tau \cup \bar{d}_\lambda$, очевидно, выполняются условия теоремы 1. Отсюда, с учетом $\tau \cup \bar{d}_\lambda = \delta$, следует $E(N_2, n, \delta)$. Но $N_2 \subseteq N_1 \subseteq V \subseteq F_\beta$. Противоречие.

2) Справедливость теоремы 3 при замене $\bar{H}$ на δ и $\bar{H}$ на δ устанавливается повторением доказательства теоремы 3, но с соответствующей заменой.

3) Для доказательства справедливости теоремы 4 при заменах $\bar{H}$ на δ и $\bar{H}$ на δ нужно повторить рассуждения случая 1), но произведя в нем все те замены, которые указаны в доказательстве теоремы 4. ||

Гомельская лаборатория
Институт математики
Академии наук БССР

Поступило
27 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. А. Чунихин, ДАН, 73, № 1, 29 (1950). ² С. А. Чунихин, Матем. сборн., 39 (81), № 4, 465 (1956). ³ С. А. Чунихин, Матем. сборн., 55 (97), № 2, 101 (1961); S. A. Chunihin, Am. Math. Soc. Transl., (2), 45, 79 (1965). ⁴ С. А. Чунихин, ДАН, 177, № 5, 1026 (1967). ⁵ С. А. Чунихин, ДАН, 193, № 6, 1255 (1970). ⁶ С. А. Чунихин, Матем. сборн., 40, № 1, 39 (1933). ⁷ С. А. Чунихин, Подгруппы конечных групп, Минск, 1964; S. A. Chunihin, Subgroups of Finite Groups, Groningen, 1969. ⁸ Л. А. Шеметков, ДАН, 178, № 3, 559 (1968). ⁹ В. Нурперт, Math. Zs., 60, 409 (1954). ¹⁰ О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 31, 366 (1924).