Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 3

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А. Б. ШАБАТ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВИНЕРА — ХОПФА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 10 XI 1971)

Рассматривается уравнение типа Винера — Хопфа

$$P(1+T)P\varphi = f, \tag{1}$$

где T — интегральный оператор на прямой, а P — оператор проектирования,

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant x^0, \\ 0, & x < x^0. \end{cases}$$

Естественная схема построения резольвенты оператора $P(1+T)P$ основана на факторизации оператора $1+T$, т. е. представлении его в виде произведения вольтерровых операторов (см. например, [1]).

Определение 1. Оператор $1+K$, где K — интегральный оператор с ядром $K(x, y)$, будем называть вольтерровым, если $K(x, y) = 0$ по одну из сторон прямой $\{y = x\}$. При этом

$$K = K_+ \Leftrightarrow K(x, y) = 0 \text{ при } y < x,$$
$$K = K_- \Leftrightarrow K(x, y) = 0 \text{ при } y > x.$$

Задача о факторизации:

$$1 + T = (1 - K_+)^{-1}(1 + M_-),$$

т. е. задача об определении ядер K_+, K_-, сводится к решению уравнения вида (1)

$$(1 - K_+)(1 + T)(x, y) = 1 \quad \text{при } y \geqslant x,$$
$$K_+(x, y) + (K_+ * T)(x, y) = T(x, y) \quad \text{при } y \geqslant x. \tag{2}$$

Аналогичным образом получается уравнение для $M = M_-$. Здесь и в дальнейшем значок свертки обозначает композицию

$$(v_1 * v_2)(x, y) \overset{\text{опр.}}{=\!=} \int v_1(x, s)\, v_2(s, y)\, ds.$$

Общие простые свойства уравнений типа Винера — Хопфа установлены в работе [2]. Мы рассмотрим случай, когда

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} T_{11}(x-y), & T_{12}(x+y) \\ T_{21}(x+y), & T_{22}(x-y) \end{pmatrix}, \quad T_{jk} \in L_1(\mathbf{R}^1), \tag{3}$$

$$(1+T)^{-1} = 1 + \begin{pmatrix} T_{22}(y-x), & -T_{12}(y+x) \\ -T_{21}(y+x), & T_{11}(y-x) \end{pmatrix} \tag{4}$$

и

$$T_{11}(x) = T_{22}(x) = 0 \quad \text{при } x < 0. \tag{5}$$

Заметим, что операторы, удовлетворяющие условиям (3) — (5), образуют алгебру, изоморфную алгебре квадратных матриц. Изоморфизм устанавливается преобразованием Фурье и, в частности, условие (4) эквивалентно равенству единице детерминанта матрицы, соответствующей оператору $1 + T$.

Будет установлено при дополнительных упрощающих предположениях, что вопрос о построении резольвенты для уравнения (1) с оператором T, удовлетворяющим условиям (3) — (5), эквивалентен решению обратной задачи рассеяния для системы уравнений на плоскости

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right) u_1(x, y) &= p_1(x)\, u_2(x, y),\\ \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right) u_2(x, y) &= p_2(x)\, u_1(x, y).\end{aligned} \tag{6}$$

При $p_2=\bar{p}_1$ обратная задача рассеяния для системы (6) изучена в несколько других терминах в работах ([3], [4]). Мы уделим особое внимание случаю

$$p_2=-\bar{p}_1, \tag{7}$$

имеющему интересные приложения ([6]).

1. В прямой задаче рассеяния рассматривается асимптотическое (при $x\to\pm\infty$) поведение решений системы (6). При этом предполагается, что потенциал $p(x)=(p_1(x),\ p_2(x))$ стремится (в определенном смысле) к нулю, когда $|x|\to\infty$.

Теорема 1. *Предположим, что потенциал $p\in L_1(\mathbf{R}^1)$.*

Тогда для любого решения $u\in L_\infty(\mathbf{R}^2)$ системы (6) существуют однозначно определенные решения $\overset{(-)}{u}$, $\overset{(+)}{u}\in L_\infty(\mathbf{R}^2)$ невозмущенной системы (с нулевым потенциалом) такие, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<y<+\infty} |u(x, y)-\overset{(\pm)}{u}(x, y)|\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\pm\infty.$$

(Знак модуля здесь обозначает норму в $\mathbf{C}^2$.)

Более того, оператор рассеяния $S=1+T$: $\overset{(-)}{u}\to\overset{(+)}{u}$ является автоморфизмом $L_\infty(\mathbf{R}^2)$ и представим в виде

$$(S\overset{(-)}{u})(x, y)=\overset{(+)}{u}(x, y)=\overset{(-)}{u}(x, y)+(T*\overset{(-)}{u})(x, y) \tag{8}$$

где T удовлетворяет условиям (3) — (5).

Доказательства этого и следующих далее результатов по прямой задаче рассеяния можно найти в работе ([7]), правда, там наложены дополнительные требования на потенциал, но доказательства переносятся на рассматриваемый случай.

В простейшем случае обратная задача рассеяния формулируется как задача о восстановлении потенциала по оператору рассеяния. Эта задача сводится к отысканию оператора рассеяния $1+T(x^0)$ для оборванного потенциала

$$p_-(x^0; x)=\begin{cases} p(x), & x<x^0,\\ 0, & x>x^0.\end{cases}$$

При фиксированном x^0 получаем, в силу (8), что

$$u(x, y)=\overset{(-)}{u}(x, y)+(T(x^0)*\overset{(-)}{u})(x, y) \quad \text{при} \quad x=x^0$$

или

$$u=(1+M)*\overset{(-)}{u}, \qquad M(x, y)\overset{\text{опр.}}{=\!=}T(x; x, y). \tag{9}$$

Формула (9) дает решение «задачи Коши» для системы (6) с данными $\overset{(-)}{u}\in L_\infty(\mathbf{R}^2)$ на $-\infty$. Аналогичное (9) представление справедливо и для решений «задачи Коши» с данными $\overset{(+)}{u}$ при $x=+\infty$:

$$u=(1-K)*\overset{(+)}{u}. \tag{9'}$$

Немного искажая общепринятую терминологию, будем называть в о л н о в ы м и операторы $\overset{(-)}{W}=1+M$, $\overset{(+)}{W}=1-K$ в представлениях (9), (9'). Волновые операторы однозначно связаны с операторами рассеяния оборванных потенциалов (см. выше) и в этом смысле обладают свойствами (3) — (5) оператора рассеяния. Дополнительным характерным свойством волновых операторов является вольтерровость

$$\overset{(-)}{W} = 1 + M_{-}, \quad \overset{(+)}{W} = 1 - K_{+}.$$

Связь волновых операторов с оператором рассеяния устанавливается общим уравнением теории рассеяния

$$(1 - K_{+})(1 + T) = 1 + M_{-}, \tag{10}$$

являющимся непосредственным следствием определений этих операторов. Уравнение (10) при известном операторе рассеяния дает, например для K_{+}, уравнение (2) типа Винера — Хопфа.

Определение 2. Измеримую функцию v будем называть регулярной, если

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x} \int |v(x, y)|\, dy, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{y} \int |v(x, y)|\, dx < \infty.$$

Заметим, что интегральный оператор с регулярным ядром является ограниченным оператором в L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и что композиция двух регулярных ядер дает регулярное ядро.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *волновой оператор* (9′) *является вольтерровым оператором*: $\overset{(+)}{W} = 1 - K_{+}$, *с ядром* K_{+}, *регулярным в области* $\{x \geqslant x^0\}$, $x^0 > -\infty$. *Более того, ядро* $K = K_{+}$ *является решенем «задачи Гурса» в следующем смысле*:

I) *функции* $u = (K_{11}, K_{12})$ *и* $v = (K_{22}, K_{12})$ *являются регулярными в области* $\{x \geqslant x^0\}$ *решениями соответственно системы* (6) *и системы, в которой коэффициенты* p_1, p_2 *поменялись местами*;

II) *функции* $K_{21}(x, y)$, $K_{12}(x, y)$ *непрерывны на прямых* $x + y = h$ *для почти всех значений* h *и*

$$K_{21}(x, x) = {}^1/_2 p_1(x), \quad K_{12}(x, x) = {}^1/_2 p_2(x); \tag{11}$$

III) *выполняются условия на бесконечности*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \geqslant x^0} \int_x^\infty |K(x, y)|\, dy \to 0 \quad \text{при } x^0 \to \infty.$$

Аналогичными свойствами обладает ядро $M = M_{-}$ волнового оператора $\overset{(-)}{W}$. В частности,

$$M_{21}(x, x) = {}^1/_2 p_1(x), \quad M_{12}(x, x) = {}^1/_2 p_2(x). \tag{11′}$$

Существенно для дальнейшего, что условия I) — III) однозначно определяют ядро K_{+}.

2. В обратной задаче рассеяния заданным считается оператор рассеяния, а под решением понимается потенциал $p = (p_1, p_2) \in L_1(\mathbf{R}^1)$, для которого оператор рассеяния совпадает с заданным. При исследовании обратной задачи рассеяния мы ограничимся случаем, когда оператор рассеяния (см. теорему 1) имеет дополнительную симметрию:

$$T_{22} = \overline{T}_{11}, \quad T_{21} = -\overline{T}_{12}, \tag{12}$$

эквивалентную выполнению условия (7). Кроме того мы будем предполагать для простоты, что

$$1 + \int_0^\infty T_{jj}(s) e^{i\zeta s}\, ds \neq 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} \zeta \geqslant 0, \quad j = 1, 2. \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть задан оператор* $1 + T$, *удовлетворяющий условиям* (3) — (5), (12), (13): *Тогда*

a) *уравнение типа Винера — Хопфа* (2) *относительно* $K(x) \equiv K(x, y)$ *однозначно разрешимо в* $L_1(x, \infty)$ *при любом конечном* x;

б) *формулы* (11) *дают потенциал* $p \in L_1(-\infty, +\infty)$, *являющийся решением обратной задачи рассеяния*;

в) *решение обратной задачи рассеяния единственно.*

Схема доказательства теоремы 3. Перепишем оператор $1+T$ в виде

$$1+T = A+B, \quad A = 1+\begin{pmatrix} T_{11}, & 0 \\ 0, & T_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0, & T_{12} \\ T_{21}, & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу условий (3), (5) оператор $A = A_-$ является вольтерровым оператором с регулярным ядром, зависящим только от разности аргументов. Условие (13) означает, что оператор A имеет ограниченный обратный в $L_p(\mathrm{R}^1)$, $p \geqslant 1$, и что обратный оператор A^{-1} также обладает перечисленными свойствами оператора A. Это позволяет рассматривать вместо уравнения (2) эквивалентное уравнение относительно K_+

$$(1-K_+)(1+C) = 1+K_-, \quad C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & C_1 \\ C_2, & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Из (12) следует, что оператор $\operatorname{Re} P(1+C)P$ является положительно определенным в $L_2(x, \infty)$:

$$\operatorname{Re}((1+C)\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2_{L_2(x,\infty)}.$$

Кроме того, этот оператор является вполне непрерывным в $L_p(x, \infty)$. Отсюда следует первое из утверждений теоремы.

Заметим теперь, что при известном K_+, уравнение (14) дает регулярное в областях вида $\{x \geqslant x^0\}$ ядро K_-. Положим $1+M_- = (1+K_-)A$. Тогда функции

$$K_+(x, y) \equiv K_+(x) \in L_1(x, \infty), \quad M_-(x, y) \equiv M_-(x) \in L_1(-\infty, x)$$

удовлетворяют при любом x общему уравнению (10) теории рассеяния. Как уже отмечалось, решение уравнения (2) типа Винера — Хопфа для K_+ единственно. Единственно и решение аналогичного уравнения типа Винера — Хопфа для M_-:

$$(1+M_-)(1+T)^{-1} = 1-K_+;$$

причем в силу (4) ядро M_- обладает свойствами, аналогичными свойствам ядра K_+. Из формул, определяющих K_-, M_- через K_+, следует, что

$$M_{12}(x, x) = K_{12}(x, x), \quad M_{21}(x, x) = K_{21}(x, x).$$

Ясно теперь, что потенциал p, восстановленный по K_+ или, что то же самое, по M_- удовлетворяет условию

$$p \in L_1(-\infty, +\infty).$$

Для доказательства теоремы остается проверить, что оператор рассеяния для восстановленного потенциала совпадает с заданным оператором $1+T$. Для этого приходится привлекать определение волновых операторов непосредственно через потенциал (теорема 2).

Справедлива

Лемма. *Пусть K_+ — регулярное решение приведенного уравнения* (14) *теории рассеяния. Тогда K_+ является решением задачи Гурса для системы уравнений* (6) *с потенциалом, восстановленным по формулам* (11) *в том смысле, что выполняются условия* I) — III) *теоремы* 2.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
3 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и приложения, «Наука», 1967. [2] A. Devinatz, M. Shinbrot, Trans. Am. Math. Soc., **145**, 467 (1969). [3] М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян, Функциональный анализ и его приложения, 4, 73 (1970). [4] М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян, Докл. АН АрмССР, 46, № 4, 150 (1968). [5] З. С. Агранович, В. А. Марченко, Обратная задача теории рассеяния, Харьков, **1960**. [6] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ, **61**, в. 1(7), 118 (1971). [7] А. Б. Шабат, Дифференциальные уравнения, № 1 (1972).