Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 519.48 МАТЕМАТИКА

А. Т. ГАЙНОВ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ МОНОКОМПОЗИЦИОННЫХ АЛГЕБР

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 IV 1971)

Алгебра $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}, xy, N(x, y) \rangle$ над полем Φ характеристики $\neq 2$ называется монокомпозиционной, если на ней задана ненулевая симметричная билинейная форма $N(x, y)$ такая, что $\forall x, y \in \mathfrak{A}$ $N(x^2, xy + yx) = 2N(x, x)N(x, y)$. Если форма $N(x, y)$ вырожденная (невырожденная), то монокомпозиционная алгебра $\mathfrak{A}$ называется вырожденной (невырожденной).

Предложение 1. *Если монокомпозиционная алгебра $\mathfrak{A}$ имеет единицу* 1, *то* $N(1, 1) = 1$.

Отсюда для всякой монокомпозиционной алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей 1 существует разложение $\mathfrak{A} = \Phi 1 \oplus A$, где $A = \langle A, a \times b, f(a, b) \rangle$ — квазимонокомпозиционная алгебра (кратко КМ-алгебра), которую мы будем называть КМ-алгеброй, ассоциированной с алгеброй $\mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна в том и только в том случае, если КМ-алгебра A коммутативна, а билинейная форма $f(a, b)$ симметрична. Присоединенная алгебра $\mathfrak{A}^+$ к монокомпозиционной алгебре $\mathfrak{A}$ также является монокомпозиционной относительно той же самой билинейной формы $N(x, y)$ и $A^+ = \langle A^+, g(a, b) \rangle$ будет КМ-алгеброй, ассоциированной с алгеброй $\mathfrak{A}^+$, где $g(a, b) = \frac{1}{2}[f(a, b) + f(b, a)]$ (см. ([1], [2])). Под степенью t произвольной алгебры $\mathfrak{A}$ будет пониматься максимальное число ее попарно ортогональных идемпотентов (если только оно конечно).

В дальнейшем будут рассматриваться только невырожденные монокомпозиционные алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей 1.

Теорема 2. *Элемент $e \neq 1$ алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является в ней идемпотентом, когда $e = \frac{1}{2}(1 + a)$, где $a \in A$, $a \times a = 0$, $f(a, a) = 1$.*

Степень алгебры $\mathfrak{A}$ равна 1 *или* 2.

Теорема 3. *Всякий собственный идеал алгебры $\mathfrak{A}$, $\dim \mathfrak{A} \geqslant 3$, содержит идемпотент, но не имеет единицы.*

Следствие 1. *Алгебра $\mathfrak{A}$ степени* 1 *является простой.*

Следствие 2. *Алгебра $\mathfrak{A}$, $\dim \mathfrak{A} \geqslant 3$, не разлагается в прямую сумму своих идеалов.*

Теорема 4. *Если $\mathfrak{A}$ — некоммутативная йорданова алгебра, то она квадратичная.*

Следствие. *Алгебра $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является композиционной (см. ([3])), когда она альтернативна.*

Теорема 5. *Пусть $\mathrm{Card}\,\Phi \geqslant 7$. Конечномерная алгебра $\mathfrak{A}$ над полем Φ тогда и только тогда является алгеброй с ассоциативными степенями, когда она квадратичная.*

Теорема 6. *Если $\dim \mathfrak{A} \geqslant 3$, то алгебра $\mathfrak{A}$ центральная.*

Определение 1. Коммутативную КМ-алгебру $A = \langle A, a \times b, f(a, b) \rangle$ назовем биизотропной, если $\forall x, y, z, t \in A$ $f(x \times y, z \times t) = 0$. КМ-алгебру A назовем биизотропной, если присоединенная к ней алгебра $A^{(+)}$ является биизотропной.

Теорема 7. *Если КМ-алгебра A, $\dim \geqslant 2$, биизотропная, то $\mathfrak{A}$ — центральная простая алгебра.*

Проблема 1. Будет ли простой всякая невырожденная монокомпозиционная алгебра $\mathfrak{A}$ с единицей, $\dim\mathfrak{A} \geqslant 3$?

Определение 2. Изоморфизм $\varphi: \mathfrak{A} \to \tilde{\mathfrak{A}}$ монокомпозицонной алгебры $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}, xy, N(x, y)\rangle$ на монокомпозиционную алгебру $\tilde{\mathfrak{A}} = \langle \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{x}\tilde{y}, \tilde{N}(\tilde{x}, \tilde{y})\rangle$ назовем изометрическим, если $\forall x, y \in \mathfrak{A}$ $\tilde{N}(x\varphi, y\varphi) = N(x, y)$.

Теорема 8. *Пусть* φ: $\mathfrak{A} \to \tilde{\mathfrak{A}}$ — *изоморфизм между двумя монокомпозиционными алгебрами* $\mathfrak{A}$ *и* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *с единицей (возможно, вырожденными).* φ *будет изометрическим изоморфизмом в том и только в том случае, если* $A\varphi = \tilde{A}$ и φ *является изометрическим изоморфизмом* КМ-*алгебры* $A = \langle A, a \times b, f(a, b)\rangle$ *на* КМ-*алгебру* $\tilde{A} = \langle \tilde{A}, \tilde{a} \times \tilde{b}, \tilde{f}(\tilde{a}, \tilde{b})\rangle$, *т. е.* $\forall a, b \in A$ $\tilde{f}(a\varphi, b\varphi) = f(a, b)$. Здесь A и $\tilde{A}$ — КМ-*алгебры, ассоциированные с монокомпозиционными алгебрами* $\mathfrak{A}$ *и* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *соответственно.*

Теорема 9. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *и* $\tilde{\mathfrak{A}}$ — *конечномерные невырожденные монокомпозиционные алгебры с единицей, причем* КМ-*алгебра* А, *ассоциированная с алгеброй* $\mathfrak{A}$, *биизотропная.*

Тогда всякий изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ *на алгебру* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *будет изометрическим.*

Проблема 2. Будет ли каждый изоморфизм φ между невырожденными монокомпозиционными алгебрами $\mathfrak{A}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$ с единицей обязательно изометрическим?

В дальнейшем будет предполагаться, что $A = \langle A, a \times b, f(a, b)\rangle$ — невырожденная коммутативная биизотропная КМ-алгебра конечной размерности n над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики $\neq 2$, $f(a, b)$ — симметричная билинейная форма. Следующая теорема дает описание всех таких алгебр.

Теорема 10. *В* КМ-*алгебре* A *можно выбрать такой базис*

$$e_1, e_2, \ldots, e_r, d_1, d_2, \ldots, d_r, f_1, f_2, \ldots, f_{n-2r}, \tag{1}$$

что

1) $e_1, e_2, \ldots, e_r$ — *базис* $A \times A$.

2) *матрица* M *билинейной формы* $f(a, b)$ *относительно базиса* (1) *имеет вид*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2r} \end{pmatrix},$$

где E_k — *единичная матрица порядка* k,

3) *таблица умножения алгебры* A *относительно базиса* (1) *принимает) вид*

$$e_i \times e_j = e_i \times f_k = f_k \times f_m = 0, \quad e_i \times d_j = \sum_{s=1}^{r} a_{js}^{i} e_s, \tag{2}$$

$$d_i \times d_j = \sum_{s=1}^{r} b_{ijs} e_s, \quad d_i \times f_k = \sum_{s=1}^{r} c_{is}^{k} e_s \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r;\ k, m = 1, 2, \ldots, n-2r),$$

причем выполняются равенства

$$a_{ij}^{k} + a_{ji}^{k} = b_{ijk} + b_{jki} + b_{kij} = c_{ij}^{m} + c_{ji}^{m} = 0$$
$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, r; \quad m = 1, 2, \ldots, n-2r). \tag{3}$$

Обратно, если коммутативная алгебра A *в некотором базисе* (1) *имеет таблицу умножения* (2), (3), *то определив на* A *билинейную форму* $f(a, b)$ *с помощью матрицы* M *вышеуказанного вида, мы получим невырожденную биизотропную* КМ-*алгебру* A.

Теорема 11. *Пусть в* КМ-*алгебрах* A *и* $\tilde{A}$ *размерности* n *выбраны базисы так, как указано в теореме* 10, $\dim A \times A = \dim \tilde{A} \times \tilde{A} = r$.

Тогда матрица G порядка n в том и только в том случае будет являться матрицей преобразования этих базисов, если она имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} P' & O & O \\ T & Q & V \\ U & O & S \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}r \\ \}n-2r \end{matrix},$$

$$\qquad \underbrace{\quad}_{r} \; \underbrace{\quad}_{r} \; \underbrace{\quad}_{n-2r}$$

где O — нулевые матрицы, $P \neq Q^{-1}$, $SS' = E_{n-2r}$, $U = SV'Q'^{-1}$, $TQ' + {}^1/_2VV'$ — кососимметрическая матрица, V — произвольная матрица.

Теорема 12. КМ-*алгебры A и $\bar{A}$ тогда и только тогда изометрически изоморфны между собой, когда матрица G изоморфизма φ относительно базисов вида* (1) *алгебр A и $\bar{A}$ имеет вид, указанный в теореме* 11, *а структурные константы алгебр относительно этих базисов (см. равенства* (2), (3)), *связаны между собой соотношениями*

$$\bar{a}_{ij}^k = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{r} q_{i\alpha}q_{j\beta}p_{\gamma k}a_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\bar{b}_{ijk} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{r} [(t_{i\gamma}q_{j\alpha} + t_{j\gamma}q_{i\alpha})q_{k\beta}a_{\alpha\beta}^{\gamma} + q_{i\alpha}q_{j\beta}q_{k\gamma}b_{\alpha\beta\gamma}] +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \sum_{\gamma=1}^{n-2r} (q_{i\alpha}v_{j\gamma} + q_{j\alpha}v_{i\gamma})q_{k\beta}c_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\bar{c}_{ij}^k = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{r} q_{i\alpha}q_{j\beta}u_{k\gamma}a_{\alpha\beta}^{\gamma} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \sum_{\gamma=1}^{n-2r} q_{i\alpha}q_{j\beta}s_{k\gamma}c_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2r).$$

Здесь $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, $S = (s_{ij})$, $T = (t_{ij})$, $V = (v_{ij})$, $U = (u_{ij})$ — матричные блоки матрицы G изоморфизма φ.

Следствие. *Совокупность структурных констант a_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2, \ldots, r)$ является 2-ковариантным и 1-контравариантным тензором в r-мерном векторном пространстве, причем антисимметричным относительно нижних индексов i, j. Если тензоры a_{ij}^k и $\bar{a}_{ij}^k$ не эквивалентны друг другу, то алгебры A и $\bar{A}$ не будут изометрически изоморфными.*

Используя теоремы 11 и 12, автором найдены все неизоморфные биизотропные КМ-алгебры, для которых $\dim A \times A \leqslant 2$. Укажем только их число σ_n $(n = \dim A)$: $\sigma_4 = 4$, $\sigma_5 = 5$, $\sigma_n = 6$ $(n \geqslant 6)$.

П. И. Васильев показал, что минимальная размерность небиизотропных КМ-алгебр равна 6.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
7 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Т. Гайнов, Сибирск. матем. журн., 10, № 1, 3 (1969). [2] А. Т. Гайнов, Сибирск. матем. журн., 10, № 5, 1006 (1969). [3] N. Jacobson, Rend. Circ. mat. Palermo, 11, № 7, 55 (1958).