Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 517.948 : 513.88 *МАТЕМАТИКА*

А. Н. ГРИНЬ

К ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ ВЕТВЛЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 IV 1971)

Пусть $F \in C^\alpha(U(0;\ 0);\ Y)$; X, Y — вещественные B-пространства, $U(0;\ 0) \subset X \times R$ — открытая окрестность точки $(0;\ 0)$, $x \in X$, $\lambda \in R$, $F(0;\ 0) = 0$, $F_x' \mid_{\substack{x=0\\ \lambda=0}}$ нётеров и ограничен.

Основной путь построения для уравнения

$$F(x;\ \lambda) = 0 \tag{1}$$

множества его «малых» решений

$$\tilde{L}_F = \{\tilde{x}(\lambda)\colon\ \tilde{x} \in C\,(U_{\tilde{x}}(0);\ X);\quad \forall\lambda \in U_{\tilde{x}}(0)\colon\ F(\tilde{x}(\lambda);\ \lambda) = 0;$$
$$\tilde{x}(0) = 0;\quad U_{\tilde{x}}(0) \subset R\}$$

связан с определением множества L_Φ «малых» решений уравнения разветвления в смысле [1] для (1):

$$\Phi(\xi;\ \lambda) = 0, \tag{2}$$

где $\Phi \in C^\alpha(U_1(0,\ 0);\ Y_1)$; X_1, Y_1 — эвклидовы пространства размерностей соответственно m, n, $U_1(0;\ 0) \subset X_1 \times R$ — открытая окрестность точки $(0;\ 0)$ и $m = \dim\ker F_x' \mid_{\substack{x=0,\\ \lambda=0}}$, $n = \dim\operatorname{coker} F_x' \mid_{\substack{x=0,\\ \lambda=0}}$, $\xi \in X_1$, $\lambda \in R$, производящимся сочетанием метода исключения неизвестного [1] и метода диаграмм Ньютона [1], развитыми в применении к данной проблеме трудами С. Лефшеца М. М. Вайнберга, В. А. Треногина и других исследователей. Однако практическое применение метода исключения оказывается возможным не всегда, в силу того что отображение F из (1) позволяет определить для отображения Φ из (2) лишь отрезок его ряда Тейлора (Φ_r) степени r в окрестности точки $(0;\ 0) \in X_1 \times R$ при любом $r \geqslant 0$; при этом связь между $\tilde{L}_\Phi$ и $\tilde{L}_{\Phi_r}$ не известна. В этой связи, определив факт равенства количеств «малых» решений двух уравнений вида (2) как эквивалентность (в силу некоторого отношения эквивалентности) множеств этих решений, важно выяснить, *при каких условиях два произвольных представителя r-джета отображения* Φ *в точке* $(0;\ 0)$ *определяют эквивалентные множества «малых» решений. Иными словами, когда остаток ряда Тейлора отображения* Φ *в* $(0;\ 0)$ *степени выше* r *«несуществен» для построения множества* $\tilde{L}_\Phi$.

Поставленная задача решается в настоящей работе: показывается, что «почти все» в определяемом ниже смысле отображения $\Phi(\xi;\ \lambda)$, определяющие уравнения вида (2), являются решениями задачи.

Пусть $A_{\lambda^*} = \{[0;\ \lambda^*]$, если $\lambda^* > 0$; $[\lambda^*,\ 0]$, если $\lambda^* < 0\}$ и $\tilde{L}_\Phi^{A_{\lambda^*}} = \{\tilde{\psi}(\lambda)\colon\ \tilde{\psi} \in C\,(A_{\lambda^*},\ X_1);\ \tilde{\psi}(0) = 0;\ \Phi(\tilde{\psi}(\lambda);\ \lambda) = 0\quad \forall\lambda \in A_{\lambda^*}\}$. Пусть $\tilde{L}_\Phi = \bigcup_{\lambda^* \in R\setminus\{0\}} \tilde{L}_\Phi^{A_{\lambda^*}}$. На $\tilde{L}_\Phi$ введем отношение эквивалентности S_1, полагая $\tilde{\psi}_1(\lambda) \sim \tilde{\psi}_2(\lambda)$, если $\exists\lambda^*\ |\lambda^*| > 0$:

$$\forall\lambda \in A_{\lambda^*}\quad \tilde{\psi}_1(\lambda) = \tilde{\psi}_2(\lambda).$$

Определение 1. Элементы множества $L_\Phi = \tilde{L}_\Phi / S_1$ будем называть λ-решениями уравнения (2) $(L_\Phi = \{\psi(\lambda)\})$.

Введем далее на L_Φ отношение эквивалентности S_2, полагая, что $\psi_1 \sim \sim \psi_2$, если $\exists T_{1,2} \subset [0; 1] \times R$; $F_{1,2} \in C(T_{1,2}; X_1)$ такие, что

1) $\forall t \in [0; 1] \quad \exists \lambda^* \quad T_{1,2} \cap \{t\} \times R = A_{\lambda^*}$; $\partial T_{1,2} = [0; 1] \times \{0\} \cup \cup \{0\} \times A_{\lambda_1} \cup \{1\} \times A_{\lambda_2} \cup \Gamma_\varphi$; $\varphi \in C([0; 1]; R)$; $\varphi(0) = \lambda_1$; $\varphi(1) = \lambda_2$;

2) $\forall t^* \in [0; 1] \ \exists \psi(\lambda) \in \lambda_\Phi$, $\exists \tilde{\psi}(\lambda) \in \psi(\lambda)$ $(\tilde{\psi}(\lambda) = F_{1,2}(t^*; \lambda))$;

3) $\exists \tilde{\psi}_1(\lambda) \in \psi_1(\lambda)$; $\tilde{\psi}_2(\lambda) \in \psi_2(\lambda)$ $F_{1,2}(0; \lambda) = \tilde{\psi}_1(\lambda)$; $F_{1,2}(1; \lambda) = = \tilde{\psi}_2(\lambda)$,

и рассмотрим фактор-множество $\bar{L}_\Phi = L_\Phi / S_2$.

Класс эквивалентности из $\bar{L}_\Phi$ по S_2 обозначим через K_Φ.

Определение 2. Скажем, что количества «малых» решений уравнений $\Phi_i(\xi; \lambda) = 0$ $(i = 1, 2)$ вида (2) равны, если

1) множество $\bar{L}_{\Phi_1}$ равномощно множеству $\bar{L}_{\Phi_2}$;

2) $\exists \gamma$ $L_{\Phi_1} \sim L_{\Phi_2}$ $\forall K_{\Phi_1} \in \bar{L}_{\Phi_1}$, K_{Φ_1} и $\gamma(K_{\Phi_1})$ равномощны. Факт равенства в смысле определения 2 будем обозначать как $\bar{L}_{\Phi_1} \simeq \bar{L}_{\Phi_2}$.

Пусть далее $J_0{}^r$ есть множество r-джетов в нуле отображений из $X_1 \times R$ в Y_1 и $j^r(\Phi)$ — r-джет в нуле отображения Φ.

Рассмотрим естественную проекцию h^r: $J_0{}^r \to J_0{}^{r-1}$. Полиномиальный представитель $[h^r]^{-1}(J^{r-1}(\Phi))$ степени r есть

$$\Phi_r(\xi; \lambda) = \Big(\sum_{|\omega|+k=1} a^{(i)}_{\omega, k} \xi^\omega \lambda^k,\ i = 1, 2, \ldots, n \Big),$$

$$\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_m),\ m = \dim X_1,\ n = \dim Y_1,\ a^{(i)}_{\omega, k} \in R.$$

В пространстве Ω^r с координатами $\omega^r \in \Omega^r$, $\omega^r = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \lambda; \{a^{(i)}_{\omega, k}\}: i = 1, 2, \ldots, n;\ |\omega| + k = r\}$, рассмотрим алгебраическое многообразие G^r, определенное уравнением $\Phi_r\ |\xi; \lambda| = 0$. Естественно, что $Q^r = \{q^r: q^r = \{a^{(i)}_{\omega, k}\}: i = 1, 2, \ldots, n,\ |\omega| + k = r\} \in G^r$.

Определение 3. $q^r \in Q^r$ есть точка регулярного примыкания Q^r к G^r, если $\exists U(q^r) \subset \Omega^r$, что из $f: R^k \to \Omega^r$ трансверсально к Q^r в точке q^r, следует, что f трансверсально к $G^r \cap U(q^r)$ при некоторой алгебраической стратификации Σ G^r.

Определение 4. Скажем, что Φ есть отображение Тома порядка r, если точка $q^r \in Q^r$, определяющая отображение $\Phi_r \in J^r(\Phi)$ есть точка регулярного примыкания Q^r к G^r.

Теорема 1. *Если*

1) $\Phi(\xi; \lambda)$ *есть отображение Тома порядка* r,

2) $\Phi_1(\xi) = \Phi(\xi; 0)$ *есть отображение Тома порядка* r, *то* $\forall \Phi_{1,2} \in \in J^r(\Phi)$ $\Phi_{1,2} \in C^\alpha(U_{1,2}[(0; 0)]; Y_1)$: $\bar{L}_{\Phi_1} \simeq \bar{L}_{\Phi_2}$.

Доказательство теоремы основано на построении специальных слабых стратификаций множеств $\Phi_i{}^{-1}(0)$ $(i = 1, 2)$ в окрестностях нуля, применении к построенным стратифицированным множествам теоремы изотопии Тома и следствия из нее — теоремы 3 из ([3]).

Пусть далее $r \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ и $T^r \subset Q^r$ таково, что если $q^r \in T^r$, то q^r не удовлетворяет определению 3. Тогда справедлива

Теорема 2. *T^r имеет в Q^r меру нуль.*

Основной при доказательстве теоремы 2 является

Лемма 1. $\forall r \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ $\exists \Sigma$ *такое, что*

1) $\Sigma = \{s\}$ — *слабая стратификация множества* G^r,

2) $\forall s \in \Sigma$ *либо* $s \subset Q^r$, *либо* $s \cap Q^r = \Lambda$.

3) $\forall s \subset Q^r$; $\dim s = \dim Q^r$: s — *множество точек регулярного примыкания* Q^r *к* G^r.

Теорема 2 расшифровывает введенный ранее термин «почти все».

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило 20 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений, «Наука», 1969. [2] Ф. Фам, Введение в топологическое исследование особенностей Ландау, М., 1970. [3] R. Thom, Papers Presented at the Bombay Colloquium, 1964, p. 191.