Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 519.44 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. ШЕМЕТКОВ

О ФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком В. М. Глушковым 24 XII 1971)

В этой статье рассматриваются свойства конечной группы, связанные с произвольной локальной формацией. Напомним определение локальной формации ([1]).

Каждому простому числу p сопоставим некоторую (возможно, пустую) формацию $\mathfrak{F}(p)$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех тех конечных групп G, у которых каждый главный фактор $\mathfrak{H} = H/K$ удовлетворяет условию: $G/C_G(\mathfrak{H}) \in \mathfrak{F}(q)$ для любого простого делителя q порядка $\mathfrak{H}$. Множество $\mathfrak{F}$ и будет локальной формацией, определенной через формации $\mathfrak{F}(p)$. По определению, единичная группа содержится в $\mathfrak{F}$.

В конечной группе G обозначим через $G^{\mathfrak{F}}$ подгруппу, являющуюся пересечением всех тех нормальных подгрупп M группы G, для которых $G/M \in \mathfrak{F}$. Так как $G/G \in \mathfrak{F}$, то такая подгруппа всегда существует. Подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G (см. ([2]), стр. 55).

$\mathfrak{F}$-корадикалы в различных частных случаях изучались давно. Например, если $\mathfrak{F}$ — формация всех конечных П-групп, являющаяся, очевидно, локальной, а $G^{\mathfrak{F}}$ — П′-группа, то получается ситуация классической теоремы Шура — Цассенхауза. Уже этот пример указывает на содержательность проблемы отыскания конечных групп с дополняемыми $\mathfrak{F}$-корадикалами. Эта проблема исследовалась в классе разрешимых групп в работах ([3–8]), а в классе П-разрешимых групп — М. И. Кравчуком ([9]) и А. П. Кохно ([10]). В настоящей работе, отбрасывая условия разрешимости и П-разрешимости, мы докажем самый общий результат о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала в произвольной конечной группе без каких бы то ни было ограничений на локальную формацию $\mathfrak{F}$ (теорема 3).

Теоремы 1 и 2 этой статьи вместе с теоремой 2 работы ([12]) служат средством для получения теоремы 3. Ввиду результатов работы ([11]), частными случаями теоремы 1 являются теоремы 1 и 6 из ([10]), а также теорема 2.1 работы ([8]); следствием теоремы 1 является также результат Б. Хупперта о конечных группах с абелевой силовской p-подгруппой (([13]), лемма 3.2, теорема 3.3).

Обозначения: G — конечная группа, E — единичная группа; зафиксируем некоторую локальную формацию $\mathfrak{F}$ и ее локальное задание формациями $\mathfrak{F}(p)$; определение $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ дано выше; главный pd-фактор — это главный фактор, порядок которого делится на простое число p. Главный фактор $\mathfrak{H} = H/K$ группы G назовем $\mathfrak{F}$-центральным, если $G/C_G(\mathfrak{H}) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}(p)$ для любого простого p, делящего порядок $\mathfrak{H}$. Главный фактор, не являющийся $\mathfrak{F}$-центральным, называется $\mathfrak{F}$-эксцентральным. Если П — некоторое множество простых чисел, причем $\mathfrak{P}(p)$ есть формация всех конечных групп при $p \in \Pi$, а $\mathfrak{P}(q) = \phi$ при $q \notin \Pi$, то локальная формация $\mathfrak{P}$, определенная через эти формации, есть не что иное, как формация всех конечных П-групп; отметим, что в этом случае $\mathfrak{P}$-корадикал группы G обозначают через $O^{\Pi}(G)$.

Теорема 1. *Если для некоторого простого числа p силовская p-подгруппа $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то каждый главный pd-фактор группы G, лежащий ниже $G^{\mathfrak{F}}$, является $\mathfrak{F}$-эксцентральным.*

Доказательство. Предположим, что G — конечная группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Это значит, что существует локальная формация $\mathfrak{F}$ такая, что $G^{\mathfrak{F}}$ не удовлетворяет утверждению теоремы. Таким образом, $G^{\mathfrak{F}} \neq E$, $\mathfrak{F}(p) \neq \phi$ и G обладает главными $\mathfrak{F}$-центральными pd-факторами, лежащими ниже $G^{\mathfrak{F}}$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$, Для G/N теорема верна, причем $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/N$. Поэтому ясно, что N — pd-группа и $G/C_G(N) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}(p)$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(N)$, а потому N — p-группа, входящая в центр подгруппы $G^{\mathfrak{F}}$. Кроме того, ясно, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, входящая в $G^{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что $G^{\mathfrak{F}}$ не является p-группой. Пусть $\mathfrak{P}$ обозначает формацию всех конечных p-групп, локально определенную следующим образом: $\mathfrak{P}(p) = \{E\}$, $\mathfrak{P}(q) = \phi$ при $q \neq p$. Если нормализатор V в группе $G^{\mathfrak{F}}$ силовской p-подгруппы P из $G^{\mathfrak{F}}$ не совпадает с G, то для V и формации $\mathfrak{P}$ теорема верна. Следовательно, в группе V нет центральных p-факторов, лежащих ниже $V^{\mathfrak{P}} = O^p(V)$, откуда следует, что $N \cap O^p(V) = E$ и $O^p(V) \neq V$. Поэтому, ввиду теоремы Грюна ([1], стр. 425), $O^p(G_{\mathfrak{F}}) \neq G_{\mathfrak{F}}$ и тем более $O^p(G) \neq G$, а значит, для $O^p(G^{\mathfrak{F}})$ и формации $\mathfrak{P}$ теорема верна. Отсюда, ввиду $O^p(G^{\mathfrak{F}}) = (O^p(G^{\mathfrak{F}}))$, заключаем, что $N \cap O^p(G^{\mathfrak{F}}) = E$. Но тогда в $O^p(G^{\mathfrak{F}})$ содержится отличная от N минимальная нормальная подгруппа группы G. Противоречие. Таким образом, нужно рассмотреть следующую возможность: $V = G_{\mathfrak{F}} = G$. По теореме Цассенхауза ([1], стр. 350), $P = [P, G] \times (P \cap Z(G))$. Так как $N \subseteq Z(G)$, то отсюда вытекает, что группа G обладает минимальной нормальной подгруппой, либо входящей в $[P, G]$, либо имеющей порядок, не делящийся на p. А это противоречит единственности N.

Случай 2. Предположим теперь, что $G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой. Пусть C — пересечение централизаторов в G всех $\mathfrak{F}$-центральных главных pd-факторов группы G. Тогда $C_G(N) \supseteq C \supseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то каждый главный pd-фактор группы $G/G^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-центральным. Значит, $C/G^{\mathfrak{F}}$ является пересечением централизаторов всех главных pd-факторов группы $G/G^{\mathfrak{F}}$. По теореме VI.5.4 монографии ([1]) группа $C/G_{\mathfrak{F}}$ является p-нильпотентной. Кроме того ясно, что $G/C \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}(p)$.

Допустим, что C p-нильпотентна. Тогда по теореме VI.5.4 из ([1]) подгруппа C централизует каждый главный pd-фактор группы G. Отсюда, учитывая принадлежность G/C формации $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}(p)$ и то, что $G^{\mathfrak{F}}$ есть p-группа, получаем $\mathfrak{F}$-центральность всех главных факторов группы G. Противоречие.

Пусть C не p-нильпотентна. Так как $C/G^{\mathfrak{F}}$ p-нильпотентна, то ее силовская p-подгруппа обладает нормальным дополнением $R/G^{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим подгруппу R, которая, очевидно, нормальна в G и не p-нильпотентна. Подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ является нормальной абелевой силовской p-подгруппой в R, причем $N \subseteq Z(R)$. По теореме Цассенхауза ([1], стр. 350), $G^{\mathfrak{F}} = [G^{\mathfrak{F}}, R] \times (G^{\mathfrak{F}} \cap Z(R))$. Так как R не p-нильпотентна, то $[G^{\mathfrak{F}}, R] \neq E$. А это противоречит отмеченной выше единственности подгруппы N. Теорема 1 доказана.

Следствие ([13]). *Пусть R — наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой p-разрешима. Если силовская p-подгруппа из R абелева, то R не имеет композиционных факторов порядка p.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}(p)$ — множество всех p-разрешимых конечных групп, $\mathfrak{F}(q)$ — множество всех конечных групп при $q \neq p$. Тогда локальная формация $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией всех p-разрешимых конечных групп. Заметим, что в этом случае каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный pd-фактор является p-фактором. Итак, $R = G^{\mathfrak{F}}$, причем, ввиду условия, каждый главный p-фактор группы G, лежащей ниже R (если такие существуют), является $\mathfrak{F}$-центральным. Теперь применяем теорему 1.

Теорема 2. *Пусть для некоторого простого числа p силовская p-подгруппа P подгруппы $G^{\mathfrak{F}}$ является абелевой.*

Тогда P обладает дополнением в любой ее содержащей силовской p-подгруппе группы G.

Доказательство. Напомним определение добавления, введенное в работе ([14]). Добавлением к нормальной подгруппе K группы G называется такая подгруппа H, что $HK = G$ и $H_1K \neq G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H. Заметим, что если H — добавление к K, то $H \cap K \subseteq \Phi(H)$ (см. лемму 1.1 из ([15])). В конечной группе к каждой нормальной подгруппе существуют добавления.

Начнем теперь доказательство теоремы 2. Рассмотрим два случая.

Предположим сначала, что $O^p(G^{\mathfrak{F}}) = E$, т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ является абелевой p-группой. Пусть H — добавление к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. Так как $H \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(H), G/G^{\mathfrak{F}} \cong (H/H \cap G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$, то, учитывая насыщенность формации $\mathfrak{F}$ (см. ([1]), стр. 697), получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Допустим, что $H \cap G^{\mathfrak{F}} \neq E$. Тогда $\mathfrak{F}(p) \neq \phi$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, входящая в $H \cap G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $C_G(N) \supseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $H/C_H(N) \in \mathfrak{F}(p) \cap \mathfrak{F}$. Так как $G^{\mathfrak{F}} H = G = HC_G(N)$, то группы $G/C_G(N)$ и $H/C_H(N)$ изоморфны. Следовательно, $G/C_G(N) \in \mathfrak{F}(p) \cap \mathfrak{F}$, что противоречит теореме 1. Поэтому остается принять, что $H \cap G^{\mathfrak{F}} = E$, т. е. H — дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. Тогда произведение $G^{\mathfrak{F}}$ на силовскую p-подгруппу из H является силовской p-подгруппой группы G. В этом случае теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $O^p(G^{\mathfrak{F}}) \neq E$. Обозначим $O^p(G^{\mathfrak{F}})$ через T. Очевидно, $(G/T)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/T$, причем $G^{\mathfrak{F}}/T$ — абелева p-группа. По индукции силовская p-подгруппа S/T группы G/T представима в виде

$$S/T = (R/T)(G^{\mathfrak{F}}/T), \quad R \cap G^{\mathfrak{F}} = T. \tag{1}$$

Так как $O^p(T) = T$ и силовская p-подгруппа из T абелева, то по теореме Гашюца (([1]), стр. 426) подгруппа T обладает дополнением A в группе R, т. е.

$$R = AT, \quad A \cap T = E. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что $AG^{\mathfrak{F}} = S$, $A \cap G^{\mathfrak{F}} = E$. Ввиду теоремы VI.4.7 из ([1]), найдутся силовские p-подгруппы A_p, P, S_p соответственно в A, $G^{\mathfrak{F}}$, S такие, что $S_p = A_pP$. Так как $A \cap G^{\mathfrak{F}} = E$, то $A_p \cap P = E$. Заметим к тому же, что S_p — силовская p-подгруппа группы G (напомним, что S/T — силовская p-подгруппа из G/T). Наконец, если $P \subseteq S_p{}^x$ для некоторого $x \in G$, то $S_p{}^x \cap G^{\mathfrak{F}} \supseteq \langle P, P^x\rangle = P = P^x$, а значит, $A_p{}^x$ — дополнение к P в $S_p{}^x$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *$\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ конечной группы G обладает по крайней мере одним дополнением в G, если для любого простого числа p, делящего $|G:G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева.*

Доказательство. Пусть p — произвольное простое число, делящее $|G:G^{\mathfrak{F}}|$, G_p — силовская p-подгруппа группы G. По теореме 2, подгруппа $G_p \cap G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G_p. Следовательно, по теореме 2 работы ([12]) подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.

Заметим, что абелевость силовских p-подгрупп из $G^{\mathfrak{F}}$ в теореме 3 отбросить нельзя (см. примеры в ([3, 8, 19])).

В рамках теоремы 3 содержатся результаты о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикалов, полученные в работах ([3–10]). Следствием теоремы 3 является также теорема 5 из ([12]).

Следующий результат уточняет теорему 3 в более частной ситуации.

Теорема 4. *Пусть множество Π всех различных простых делителей числа $(|G^{\mathfrak{F}}|, |G:G^{\mathfrak{F}}|)$ не пусто и p — наименьшее простое число из Π. Пусть при любом $q \in \Pi$ силовская q-подгруппа из G является циклической.*

Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ обладает в группе G дополнением, содержащимся в нормализаторе некоторой силовской p-подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$, q — любое число из П. Пусть Q_1 — силовская q-подгруппа нормализатора N подгруппы P в $G^{\mathfrak{F}}$. Пусть Q_1 отлична от E и не является силовской подгруппой в $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда, ввиду условия, $p < q$ и PQ_1 абелева. По теореме Виландта (см. ([17]), либо ([16]), следствие 4.2.2) нормализатор V подгруппы Q_1 в $G^{\mathfrak{F}}$ q-разрешим. Таким образом, подгруппа V p, q-отделима и по теореме D 5.2 из ([18]) имеет $S_{p, q}$-подгруппу H такую, что $PQ_1 \subseteq H$. Ясно, что H является $S_{p, q}$-подгруппой и в $G^{\mathfrak{F}}$, причем ввиду $p < q$ силовская q-подгруппа Q из H нормальна в H. Так как $Q_1 \subseteq Z(H)$ и Q циклична, то из теоремы III.13.4 из ([1]) немедленно вытекает, что $Q_1 = Q$. Таким образом, мы доказали, что *либо $Q_1 = E$, либо Q_1 есть силовская подгруппа в $G^{\mathfrak{F}}$.*

По лемме Фраттини, $G = N_G(P)G^{\mathfrak{F}}$. По теореме VI.4.7 из ([1]) найдутся такие силовские q-подгруппы G_q, R, S соответственно из G, $N_G(P)$, $G^{\mathfrak{F}}$, что $G_q = RS$. Так как $N = N_G(P) \cap G^{\mathfrak{F}}$ нормальна в $N_G(P)$, то $R \cap N$ есть силовская q-подгруппа в N, а потому положим $Q_1 = R \cap N$. Так как $G_q \cap G^{\mathfrak{F}} = S$, то Q_1 содержится в S. Таким образом, если $Q_1 \neq E$, то по доказанному $Q_1 = S$, т. е. $G_q \subseteq N_G(P)$, причем по теореме 2 подгруппа S дополняема в G_q. Итак, для $N_G(P)$ и N выполняется условие теоремы 2 из ([12]), согласно которой N обладает дополнением T в $N_G(P)$. Ясно, что T есть дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает теорема С. А. Сыскина ([20]).

Гомельская лаборатория Института математики
Академии наук БССР

Поступило
20 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Huppert, Endliche Gruppen, I, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1967. [2] Б. И. Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем, «Наука», 1966. [3] E. Schenkman, Proc. Am. Math. Soc., 6, № 2, 286 (1955). [4] G. Higman, Publ. Math. Debrecen, 4, № 3—4, 455 (1956). [5] R. Carter, J. London Math. Soc., 36, № 1, 89 (1961). [6] R. Carter, T. Hawkes, J. Algebra, 5, № 2, 175 (1967). [7] E. Shult, Proc. Am. Math. Soc., 17, № 2, 318 (1966). [8] G. M. Seitz, C. R. B. Wright, Arch. Math., 21, 139 (1970). [9] М. И. Кравчук, Докл. АН БССР, 11, № 2, 97 (1967). [10] А. П. Кохно, Докл. АН БССР, 12, № 12, 1069 (1968). [11] G. M. Seitz, C. R. B. Wright, J. Algebra, 13, 374 (1969). [12] Л. А. Шеметков, ДАН, 195, № 1, 50 (1970). [13] B. Huppert, Acta sci. math., 22, № 1—2, 46 (1961). [14] Л. А. Шеметков, ДАН, 178, № 3, 559 (1968). [15] Л. А. Шеметков, Укр. матем. журн., 23, № 5, 678 (1971). [16] Л. А. Шеметков, Матем. сборн., 72 (114), № 1, 97 (1967). [17] H. Wielandt, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 22, 215 (1958). [18] P. Hall, Proc. London Math. Soc., 6, № 22, 286 (1956). [19] J. S. Rose, Proc. Edinburgh Math. Soc., 15, № 1, 57 (1966). [20] С. А. Сыскин, Сибирск. матем. журн., 12, № 2, 477 (1971).