Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 4

УДК 519.53+517.22+517.91

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ, С. В. ФОМИН

ОБОБЩЕННЫЕ МЕРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ПРЯМОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 I 1972)

1. Отсутствие в гильбертовом пространстве меры, инвариантной относительно сдвигов, приводит к принципиальным затруднениям в теории дифференциальных уравнений с функциональными производными, в частности, препятствует стандартному построению теории обобщенных функций. Аналог такой теории может быть построен (см. ([1], [2])), если вместо двойственности между классами функций рассматривать двойственность между функциями и мерами. Подобная конструкция предполагает наличие дифференциального исчисления для мер *. Оказывается, что в терминах такого исчисления естественно формулируются некоторые понятия и результаты теории марковских случайных процессов в гильбертовом пространстве, в частности, аналог так называемого прямого уравнения Колмогорова (уравнения Фоккера — Планка). В конечномерном случае этому уравнению подчиняются плотности по отношению к мере Лебега переходных вероятностей диффузионного процесса; в бесконечномерном случае эти плотности не имеют смысла и переходные вероятности следует рассматривать непосредственно как функции множеств, т. е. меры.

Сильный вариант дифференциального исчисления мер рассмотрен в ([2-4]), здесь мы применяем слабый вариант, т. е. рассматриваем каждую меру как функционал на некотором основном пространстве.

2. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathscr{P}$ — совокупность всех конечномерных ортопроектов в H. Напомним, что функция $f(x)$, $x \in H$, называется цилиндрической, если существует $P \in \mathscr{P}$, для которого $f(Px) = f(x)$. Проектор P и подпространство $H_P = PH$ называются носителями функции $f(x)$.

Пусть Φ — линейное пространство, элементами которого являются ограниченные бесконечно дифференцируемые с ограниченными производными функции $\varphi(x)$, $x \in H$, со сходимостью, относительно которой оно замкнуто в пространстве всех таких функций.

Пространство Φ будем называть пространством основных функций, а двойственное пространство M', составленное из всех линейных непрерывных на Φ функционалов μ,— пространством обобщенных мер. В частности, будем рассматривать пространство основных функций Φ_1, состоящее из всех обладающих описанными выше свойствами функций. Последовательность функций из Φ_1 назовем сходящейся, если она равномерно ограничена и сходится в каждой точке $x \in H$ и этим же свойством обладает последовательность производных любого порядка.

Другим важным пространством является подпространство $\Phi_ц \subset \Phi_1$, состоящее из всех содержащихся в Φ_1 цилиндрических функций. Последовательность функций из $\Phi_ц$ будем считать сходящейся, если она сходится в Φ_1 и состоит из функций с общим носителем P.

Пространство M_1' обобщенных мер содержит все счетно-аддитивные комплекснозначные определенные на борелевской алгебре функции множеств, обладающие ограниченной вариацией (будем их кратко называть

* Другой подход к дифференциальным уравнениям для функций бесконечномерного аргумента был развит М. И. Вишиком ([5]).

зарядами). Пространство $M_{\text{ц}}'$, очевидно, содержит M_1'. Кроме зарядов оно содержит все квази-меры — наборы зарядов μ_P в конечномерных подпространствах H_P, согласованные в том смысле, что

$$\mu_{P_1}(P_1^{-1}(A) \cap H_{P_1}) = \mu_P(A), \quad P < P_1 \in \mathcal{P}, \quad A \subset H_P,$$

и, в частности, все так называемые цилиндрические меры — квазимеры, имеющие счетно-аддитивное продолжение в некотором расширении пространства H.

3. Определим дифференциальные операции в пространствах основных функций и обобщенных мер. Производные основных функций $\varphi(x)$, $x \in H$, мы понимаем в смысле Фреше. Напомним, что по определению, производная $\varphi^{(k)}(x)$ при каждом $x \in H$ является k-линейным непрерывным функционалом в H.

Определим полную свертку пары k-линейных функций $\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\beta(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ (след порядка k) формулой

$$\mathrm{Sp}^k(\alpha \circledast \beta) = \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{\infty} \alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \beta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}),$$

где $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в H, если только ряд справа сходится абсолютно. При $k = 1$ эта формула определяет скалярное произведение векторов, отвечающих линейным функциям $\alpha(\xi_1)$ и $\beta(\xi_1)$, а при $k = 2$ — след произведения операторов, порождающих соответствующие билинейные функции. Мы будем ниже без оговорки обозначать эти векторы и операторы теми же символами, что и соответствующие линейные или билинейные функции. Аналогичным образом можно определить след порядка k для $2k$-линейной функции, аргументы которой определенным образом разбиты на пары. В этом смысле мы будем понимать выражение $\mathrm{Sp}^k(\alpha(x))^{(k)}$, где $\alpha(x)$ — зависящая от $x \in H$ k-линейная функция. Легко видеть, что при $\alpha(x) \equiv \alpha$, $\varphi \in \Phi$

$$\mathrm{Sp}^k(\alpha\varphi(x))^{(k)} = \mathrm{Sp}^k(\alpha \circledast \varphi^{(k)}(x)).$$

Определим однородные дифференциальные операторы в Φ формулой

$$l_k(\varphi) = \mathrm{Sp}^k(\alpha_k(x) \circledast \varphi^{(k)}(x)),$$

где $\alpha_k(x)$ — бесконечно дифференцируемые с ограниченными производными k-линейные функции (цилиндрические при $\Phi = \Phi_{\text{ц}}$). Под линейным дифференциальным оператором порядка n будем понимать линейную комбинацию однородных операторов

$$L_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} l_k(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Sp}^k[\alpha_k(x) \circledast \varphi^{(k)}(x)]. \tag{1}$$

Дифференциальные операторы в пространстве M' обобщенных мер определим при помощи соотношения двойственности

$$(\varphi, L_n^*(\mu)) = (L(\varphi), \mu),$$

в частности,

$$(\varphi, \mu^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_k)) = (-1)^k(\varphi^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_k), \mu),$$

$$(\varphi, \mathrm{Sp}^k[\alpha_k^*(x)\mu]^{(k)}) = (-1)^k(\mathrm{Sp}^k[\alpha_k \circledast \varphi^{(k)}], \mu).$$

Аналогичные дифференциальные операторы (сужения описанных выше) можно определить в сильном смысле (в терминах работы ([4])); обобщенные меры, на которых они определены, назовем гладкими зарядами.

4. Для обобщенных мер $\mu \in M_ц'$ определяется преобразование Фурье — характеристический функционал

$$\chi(\mu;\ y) = (e^{i(\cdot,\ y)},\ \mu), \quad y \in H.$$

Обобщенная мера однозначно определяется своим характеристическим функционалом. При любом $P \in \mathscr{P}$ функция $\chi(\mu;\ Py)$ непрерывна.

Назовем обобщенную меру μ позитивной, если $(\varphi,\ \mu) \geqslant 0$ для каждой неотрицательной $\varphi \in \Phi$. Характеристическая функция позитивной обобщенной меры положительно определенна. В силу теоремы Бохнера для каждого $P \in \mathscr{P}$ существует мера μ_P в H_P такая, что

$$\chi(\mu; y) = \int_{H_P} e^{i(x,y)} \mu_P(dx), \quad y \in H_P.$$

Система $\{\mu_P\}$ порождает цилиндрическую меру в H, счетноаддитивную в некотором его расширении. Мы получаем, таким образом, следующий результат.

Теорема 1. *Класс позитивных обобщенных мер из $M_ц'$ совпадает с классом всех положительных цилиндрических мер в H. Положительно определенная функция $\chi(y)$ на H является характеристическим функционалом позитивной обобщенной меры точно тогда, когда функция $\chi(Py)$ непрерывна при каждом $P \in \mathscr{P}$.*

Дифференциальные операции над обобщенными мерами обычным образом приводят к алгебраическим операциям над преобразованиями Фурье:

$$\chi(\mu^{(k)}(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_k);\ y) = (-i)^k\chi(\mu;\ y)(\xi_1,\ y)\ldots(\xi_k,\ y),$$

$$\chi(\mathrm{Sp}^k[\alpha_k \circledast \mu^{(k)}];\ y) = (-i)^k\chi(\mu;\ y)\alpha_k(y,\ \ldots,\ y).$$

5. Рассмотрим в пространстве Φ задачу Коши

$$\partial\varphi(x,\ t)\ /\ \partial t = L(\varphi(x,\ t)), \quad \varphi(x,\ 0) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

где $L(\varphi)$ — оператор типа (1), и сопряженную задачу

$$\partial\mu_t\ /\ \partial t = L^*(\mu_t), \quad \mu_t|_{t=0} = \mu_0 \tag{3}$$

в пространстве M'.

Если задача (2) разрешима и корректна в Φ, то в M' существует обобщенная мера $\mu_{x,\ t}$, для которой $(\varphi_0,\ \mu_{x,\ t}) = \varphi(x,\ t)$.

Теорема 2. *Обобщенная мера $\mu_{x,\ t}$ является слабым решением задачи Коши* (3) *с условием $\mu_{x,\ t} = \nu_x$,* где ν_x — *нормированная мера, сосредоточенная в точке x.*

В связи с этим результатом при любом слабом решении $\mu_{x,\ t}$ описанной в теореме 2 задачи будем считать функцию $(\varphi_0,\ \mu_{x,\ t})$ обобщенным решением задачи (2).

Если коэффициенты уравнения постоянны, для решения задачи Коши можно применить преобразование Фурье. Легко видеть, что справедливо представление $\chi(\mu_{x,\ t};\ y) = \exp\{Q(y)t + i(x,\ y)\}$, где $Q(y) = \sum_{k=1}^{n} (-i)^k\alpha_k(y,\ldots,\ y)$. Естественно называть оператор L эллиптическим, если выполняется условие $\operatorname{Re} Q(y) < C - q\,\|\,y\,\|^n$. Для таких операторов $\chi(\mu_{x,\ t};\ y)$ достаточно быстро убывает на бесконечности и при каждом $P \in \mathscr{P}$ функция $\chi(\mu_{x,\ t};\ Py)$ имеет в H_P интегрируемое преобразование Фурье. Обобщенная мера $\mu_{x,\ t}$ в этом случае является квази-мерой. Она является положительной цилиндрической мерой, если L — дифференциальный оператор второго порядка с положительно определенной билинейной функцией α_2. Сильный вариант теории этого уравнения при $\alpha_2 = I$ рассматривался в ([6], [7]).

6. Уравнение с переменными коэффициентами вида

$$\partial\varphi(x,\ t)\ /\ \partial t = \mathrm{Sp}[A^*(x)\varphi''(x,\ t)A(x)] + (a(x),\ \varphi'(x)) \tag{4}$$

может быть истолковано как обратное уравнение Колмогорова для марковского случайного процесса в гильбертовом пространстве. Корректность задачи Коши для него в классе Φ_1 показана в ([8]) при помощи стохастических уравнений. Соответствующая обобщенная мера $\mu_{x,\,t}$ счетно-аддитивна и служит переходной вероятностью марковского процесса. В силу теоремы 2 эта мера является слабым решением уравнения

$$\partial\mu\ /\ \partial t = \mathrm{Sp}^2[A^*(x)A(x)\mu]'' + \mathrm{Sp}(a(x)\mu)', \tag{5}$$

которое можно считать аналогом прямого уравнения Колмогорова. При помощи стохастических уравнений можно показать и существование сильного решения этого уравнения.

7. Аналогичным образом можно рассмотреть стационарное уравнение $L(\varphi(x)) = \psi(x)$. Если оно корректно в Φ, то его решение определяет слабое решение $\mu_x \in M'$: $(\psi,\ \mu_x) = \varphi(x)$ сопряженного уравнения $L^*(\mu_x) = \nu_x$.

Примечание при корректуре. В заметке Д. Н. Дудина ([9]) детально изучается пространство основных функций на гильбертовом пространстве, аналогичное пространству D Л. Шварца, и соответствующее ему пространство распределений, а также рассматриваются некоторые задачи для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в этих пространствах.

Поступило
8 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Фомин, УМН, **23**, № 2, 140 (1968). [2] С. В. Фомин, Вестн. Московск. унив., № 2, 57 (1970). [3] С. В. Фомин, УМН, **23**, № 1, 139 (1968). [4] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, С. В. Фомин, Тр. Московск. матем. общ., **24**, 133 (1971). [5] М. И. Вишик, УМН, **26**, № 2, 155 (1971). [6] С. В. Фомин, ДАН, **181**, № 4, 812 (1968). [7] А. В. Угланов, Вестн. Московск. унив., № 1 (1971). [8] Ю. Л. Далецкий, УМН, **22**, № 4, 136 (1967). [9] Д. Н. Дудин, УМН, **27**, в. 2, 169 (1972).