

В. П. ДИДЕНКО

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 31 I 1972)

В работах (¹⁻³) дана методика получения априорных оценок в позитивных нормах для широкого класса дифференциальных операторов с помощью метода *abc*. Ее сущность: составляется скалярное произведение оператора краевой задачи $\mathcal{L}$ и дифференциального оператора D первого порядка с коэффициентами $a, b, c, \dots$, которые подбираются так, чтобы скалярное произведение оценивалось снизу позитивной нормой, т. е.

$$\int_{\Omega} Du \cdot \mathcal{L}u \, d\Omega \geq |u|_{W^+(\Omega)}^2;$$

если $|Du|_{L_2} \leq |u|_{W^+(\Omega)}$, то это позволяет получить оценки типа

$$|\mathcal{L}u|_{L_2(\Omega)} \geq |u|_{W^+(\Omega)}, \quad (1)$$

где Ω — область, в которой определяется решение задачи, $L_2(\Omega)$ — пространство интегрируемых с квадратом в Ω функций.

В настоящей работе этот метод модифицируется так, что его можно назвать интегральным методом *abc*. Его сущность: оператор задачи умножается скалярно не на дифференциальный оператор D как в методе *a, b, c*, а на интегральный оператор J (грубо говоря, обратный D); величины $a, b, c, \dots$ также зависят от вида задачи и подбираются так, чтобы скалярное произведение оценивалось снизу позитивной нормой

$$\int_{\Omega} Ju \cdot \mathcal{L}u \, d\Omega \geq |Ju|_{W^+(\Omega)}^2.$$

Применяя неравенство Шварца и сокращая на $|Ju|_{W^+(\Omega)}$, получаем

$$|\mathcal{L}u|_{W^{-1}(\Omega)} \geq |Ju|_{W^+(\Omega)},$$

где $W^-(\Omega)$ — пространство с негативной нормой, сопряженное $W^+(\Omega)$. Во многих случаях удается так подобрать интегральный оператор J и пространство $W^+(\Omega)$, что справедливы неравенства

$$|Ju|_{W^+(\Omega)} \geq |u|_{L_2}, \quad |\mathcal{L}u|_{W^-(\Omega)} \leq |u|_{W^+(\Omega)}.$$

Используя их, получаем основное неравенство

$$|\mathcal{L}u|_{W^-(\Omega)} \geq |u|_{L_2(\Omega)}, \quad (2)$$

справедливое для любых $u \in W^+(\Omega)$.

Из оценки типа (1) следует существование слабого решения задачи, принадлежащего L_2 , и нужно еще специальное исследование (часто громоздкое), чтобы доказать принадлежность этого слабого решения классу $W^+(\Omega)$ или доказать, что оно является сильным.

Из оценки же типа (2) сразу следует существование сильного решения из класса $W^+(\Omega)$ сопряженной задачи. Неравенство типа (2) является не только достаточным, но и необходимым условием существования такого решения и позволяет сделать вывод о единственности сильного решения

из класса $W^+(\Omega)$ основной задачи, а также исследовать обобщенную разрешимость соответствующей задачи на собственные значения. Из неравенств типа (2) вытекают неравенства типа (1).

В настоящей работе в качестве применения интегрального метода *abc* приводится вывод энергетических неравенств с негативной нормой в правой части для гиперболических уравнений с вырождением.

Пусть Ω — односвязная область $(n+1)$ -мерного евклидова пространства E_{n+1} точек $(x_2, \dots, x_n, z)$, ограниченная поверхностями

$$|x| = {}^2/{}_3 z^{3/2}, \quad 0 \leq z \leq ({}^3/{}_4 r)^{2/3}, \quad (3)$$

$$|x| = r - {}^2/{}_3 z^{3/2}, \quad 0 \leq z \leq ({}^3/{}_4 r)^{2/3}, \quad (4)$$

где $r = \text{const} > 0$, $|x|^2 = \sum_{i=2}^n x_i^2$, и плоскостью $z = 0$; S_1, S_2, S_3 — части поверхностей (3), (4) и плоскости $z = 0$ соответственно, образующих границу области Ω . В этой области рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv z\Delta u - u_{zz} = h(x, z), \quad (5)$$

где Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным $x = (x_2, \dots, x_n)$, $h(x, z) \in L_2(\Omega)$.

Рассмотрим задачи.

1). Найти в области Ω решение u уравнения (5), удовлетворяющее условиям

$$u(x, z) = 0 \quad \forall (x, z) \in S_1 \cup S_2, \quad (6)$$

или

$$u = u_z = 0 \quad \forall (x, z) \in S_3. \quad (7)$$

2). Найти в области Ω решение u уравнения (5), зависящее только от z , $\rho (\rho \equiv |x|)$ и удовлетворяющее условиям

$$u(\rho, z) = 0 \quad \forall (\rho, z) \in S_1 \cup S_3, \quad (8)$$

или

$$u(\rho, z) = 0 \quad \forall (\rho, z) \in S_2 \cup S_3. \quad (9)$$

Поверхности (3), (4) являются характеристическими для уравнения (5). Задачи (5), (6) и (5), (7), а также (5), (8) и (5), (9) взаимно сопряжены.

Интерес к такого рода задачам вызван работами ⁽³⁻⁶⁾. Основная трудность в доказательстве априорной оценки — найти интегральный оператор J , упомянутый в начале заметки.

Используя интегральные операторы

$$(Jv)(x, z) = - \int_0^z t^\delta v(x, t) dt,$$

где δ — любое число такое, что $\delta > 1$, $v(x, z)$ — гладкие всюду функции, удовлетворяющие условиям (6);

$$(Jv)(x, z) = \begin{cases} \int_{{}^{(3/2)}|x|^{2/3}}^z (1+t)^{-1} v(x, t) dt, & |x| < \frac{r}{2}, \\ \int_{[{}^{(3/2)}(r-|x|)]^{2/3}}^z (1+t)^{-1} v(x, t) dt, & \frac{r}{2} \leq |x| \leq r, \end{cases}$$

где $v(x, z)$ — гладкие всюду функции, удовлетворяющие условиям (7);

$$(Jv)(\rho, z) = -\frac{3}{2} \int_{\psi(\rho, z)}^z t^{-1} v(\rho z^{3/2} t^{-3/2}, t) dt,$$

где $\psi(\rho, z) = \left(\frac{3}{4} (r - \sqrt{r^2 - \frac{8}{3} \rho z^{3/2}}) \right)^{2/3}$, $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$, $v(\rho, z)$ — гладкие функции, зависящие только от ρ и z , удовлетворяющие условиям (8) и равные нулю вне некоторой окрестности области Ω ;

$$(Jv)(\rho, z) = \frac{3}{2} \int_{(\frac{3}{2}\rho)^{1/3} z^{1/2}}^z t^{-1} v(\rho z^{3/2} t^{-3/2}, t) dt,$$

где $v(\rho, z)$ — гладкие функции удовлетворяющие условиям (9) и равные нулю вне некоторой окрестности области Ω .

По схеме, приведенной выше, получаем неравенства (несущественные постоянные мы опускаем)

$$|z^\varepsilon v|_{L_2} \leq |\mathcal{L}v|_{W_{S_3}^{-1}} \leq |v|_{W_{S_1 \cup S_2}^1}, \quad \varepsilon = \frac{\delta - 1}{2},$$

$$|v|_{L_2} \leq |\mathcal{L}v|_{W_{S_1 \cup S_2}^{-1}} \leq |v|_{W_{S_3}^1},$$

$$|zv|_{L_2} \leq |\mathcal{L}v|_{\widetilde{W}_{S_1 \cup S_3}^{-1}} \leq |v|_{\widetilde{W}_{S_2 \cup S_3}^1}, \quad (10)$$

$$|zv|_{L_2} \leq |\mathcal{L}v|_{\widetilde{W}_{S_2 \cup S_3}^{-1}} \leq |v|_{\widetilde{W}_{S_1 \cup S_3}^1}, \quad (11)$$

где через $W_{S_1 \cup S_2}^1$, $W_{S_3}^1$ обозначено замыкание по норме Соболева гладких в Ω функций, удовлетворяющих соответственно условиям (6), (7); через $\widetilde{W}_{S_1 \cup S_2}^1$, $\widetilde{W}_{S_2 \cup S_3}^1$ — замыкание по норме $|v|^2 = \int_{\Omega} (zv_\rho^2 + v_z^2 + v^2) d\Omega$ гладких в Ω функций, удовлетворяющих условиям (8), (9). W^{-1} с соответствующим индексом внизу означает негативное пространство, сопряженное соответствующему позитивному пространству.

Перечисленные неравенства можно выводить для гладких v , финитных соответственно возле поверхностей, указанных в индексе правой части каждого неравенства. Производя затем замыкание, получаем неравенства, справедливые для классов функций, обозначенных в правой части каждого неравенства.

Интересно отметить, что из неравенств (10), (11) следуют неравенства

$$|v|_{\widetilde{W}_{S_2 \cup S_3}^1} \leq |z^{-1} \mathcal{L}v|_{L_2} \quad \forall v \in W_{S_1 \cup S_3}^1, \quad z^{-1} \mathcal{L}v \in L_2, \quad (12)$$

$$|v|_{\widetilde{W}_{S_2 \cup S_3}^1} \leq |z^{-1} \mathcal{L}v|_{L_2} \quad \forall v \in \widetilde{W}_{S_1 \cup S_3}^1, \quad z^{-1} \mathcal{L}v \in L_2. \quad (13)$$

Действительно, из левого неравенства (10) и правого неравенства (11) следует для любого h такого, что $z^{-1}h \in L_2$, существование последовательности гладких функций u_i , для которых

$$|\mathcal{L}u_i - h|_{\widetilde{W}_{S_2 \cup S_3}^{-1}} \rightarrow 0, \quad |u_i - u|_{\widetilde{W}_{S_1 \cup S_3}^1} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Это означает, что определен оператор $\mathcal{L}$ из $\widetilde{W}_{S_1 \cup S_3}^1$ на множество $\{h\} \subset L_2$. Ясно, что область значений этого оператора плотна в $\widetilde{W}_{S_2 \cup S_3}^1$. Используя левое неравенство (11) и переходя к пределу, получим, что для любого $h \in W_{S_2 \cup S_3}^{-1}$ и любых $v \in W_{S_2 \cup S_3}^1$, $z^{-1} \mathcal{L}v \in L_2$ существует функция u такая, что $zu \in L_2$ и

$$|(h, v)| = |(u, \mathcal{L}v)| \leq |z^{-1}u|_{L_2} |z^{-1} \mathcal{L}v|_{L_2}.$$

Поэтому множество $v / |z^{-1} \mathcal{L}v|_{L_2}$ ограничено в норме $\widetilde{W}_{S_1 \cup S_3}^1$.

Итак, неравенство (12) установлено. Аналогично устанавливается неравенство (13). Подобные неравенства можно вывести для задач 1).

Определение. Функция u называется сильным решением задачи (5), (8), если существует последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций u_i , удовлетворяющих граничному условию (8) и таких, что

$$|u_i - u|_{\widetilde{W}_{S_1 \cup S_2}^1} \rightarrow 0, \quad |Lu_i - h|_{\widetilde{W}_{S_2 \cup S_3}^{-1}} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Аналогично определяются сильные решения других задач.

Теорема. Для любого h такого, что $z^{-1}h \in L_2$, существует единственное сильное решение задачи (5), (8) и задачи (5), (9).

Аналогичная теорема имеет место для задач 1).

В двумерном случае автором исследованы некоторые краевые задачи для систем смешанного типа в смешанных областях интегральным методом *abc*. Этот метод позволяет получить результаты для ряда более сложных задач. Результаты и подробные доказательства будут приведены в другом месте.

Поступило
1 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ K. O. Friedrichs, Commun. Pure Appl. Math., **11**, 3, 333 (1958). ² K. S. Morawetz, Commun. Pure Appl. Math., **11**, 3, 315 (1958). ³ Ю. М. Березанский, ДАН, **132**, № 1, 9 (1960). ⁴ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. ⁵ А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, М., 1959. ⁶ M. H. Protter, J. Rat. Mech. Anal., **3**, 4, 435 (1954).