Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 4

УДК 517.948.32:517.544 *МАТЕМАТИКА*

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

МЕТОД ЛОКАЛЬНО-КОНФОРМНОГО СКЛЕИВАНИЯ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 24 I 1972)

1. Пусть $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ — конечные ориентируемые римановы поверхности с непустыми краями $\partial\mathfrak{M}_1, \ldots, \partial\mathfrak{M}_n$. Положительная ориентация каждого края оставляет соответствующую открытую поверхность слева. На $\partial\mathfrak{M}_1, \ldots, \partial\mathfrak{M}_n$ заданы соответственно дивизоры $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$, каждый из которых составлен из конечного числа попарно различных точек, взятых с кратностью $+1$. Обозначим

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{M}_\nu, \quad \partial\mathfrak{M} = \bigcup_{\nu=1}^{n} \partial\mathfrak{M}_\nu, \quad \Lambda = \bigcup_{\nu=1}^{n} \Lambda_\nu.$$

Будем считать, что все связные компоненты пространства $\partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$ гомеоморфны интервалу $(0,1)$ числовой оси. Пусть задан всюду изменяющий ориентацию гомеоморфизм $\tau = \alpha(t)$ пространства $\partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$ на себя, не имеющий там неподвижных точек и удовлетворяющий тождеству Карлемана $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$. Совокупность введенных объектов назовем конфигурацией.

Условимся считать, что каждая поверхность $\mathfrak{M}_\nu$ снабжена стандартной конформной структурой ([1], [2]). Это, в частности, означает, что каждой точке $t_0 \in \partial\mathfrak{M}_\nu$ сопоставляется ее окрестность U_0 и параметрический гомеоморфизм $z = f_0(p)$ этой окрестности на полукруг: $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. При этом гомеоморфизме край $U_0 \cap \partial\mathfrak{M}_\nu$ окрестности U_0 переходит на диаметр полукруга, а точка t_0 — в точку $z = 0$. Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что параметрические окрестности точек множества $\partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$ не содержат точек дивизора Λ. В терминах стандартной конформной структуры мы зададим на $\tau = \alpha(t)$ дополнительные ограничения, при которых справедливы излагаемые ниже результаты.

2. Пусть $t \in \partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$, тогда $\tau = \alpha(t) \in \partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$. Исключая точки t и τ из гомеоморфизма $\tau = \alpha(t)$ с помощью параметрических отображений $x = f_1(t)$, $u = f_2(\tau)$, получим набор вещественных убывающих функций $u = \lambda(x) \equiv f_2[\alpha(f_1^{-1}(x))]$. Будем предполагать, что каждая функция $\lambda(x)$ имеет H-непрерывную производную $\lambda'(x)$, нигде не обращающуюся в нуль.

Функцию $\tau = \alpha(t)$ можно по непрерывности продолжить справа и слева на каждую точку t_1 дивизора Λ. Соответствующие предельные значения обозначим через $\alpha(t_1 - 0)$ и $\alpha(t_1 + 0)$, причем, вообще говоря, $\alpha(t_1 - 0) \neq \alpha(t_1 + 0)$. Продолжая по непрерывности тождество Карлемана, получим $\alpha[\alpha(t_1 - 0) + 0] = \alpha[\alpha(t_1 + 0) - 0] = t_1$. Среди точек последовательности

$$t_1, \quad \alpha(t_1 - 0), \quad \alpha(t_1 + 0), \quad \alpha[\alpha(t_1 - 0) - 0], \quad \alpha[\alpha(t_1 + 0) + 0], \ldots \tag{1}$$

имеется лишь конечное число k попарно различных: $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Эту совокупность точек назовем неподвижным циклом, содержащим точку t_1, а число k — порядком этого неподвижного цикла. В случае $k = 1$ неподвижный цикл состоит из одной точки (неподвижная точка). Пусть

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \ldots, x_k = f_k(t) \tag{2}$$

— стандартные параметрические отображения окрестностей всех точек $t_1, t_2, \ldots, t_k$, входящих в данный неподвижный цикл. Пусть $\tau = \alpha(t)$ переводит точки, лежащие на ∂U_μ справа от t_μ, в точки, лежащие на ∂U_{ν_μ} слева от t_{ν_μ}, $\mu = 1, 2, \ldots, k$. Тогда, исключая из $\tau = \alpha(t)$ точки τ и t с помощью гомеоморфизмов (2), получим k убывающих функций

$$x_{\nu_1} = \lambda_1(x_1), \quad x_{\nu_2} = \lambda_2(x_2), \ \ldots, \ x_{\nu_k} = \lambda_k(x_k), \tag{3}$$

где

$$x_{\nu_\mu} = \lambda_\mu(x_\mu) \equiv f_{\nu_\mu}[\alpha(f_\mu^{-1}(x_\mu))], \quad x_\mu \geqslant 0, \ x_{\nu_\mu} \leqslant 0.$$

Предполагается, что функции (3) имеют H-непрерывные и всюду отличные от нуля производные $\lambda_\nu'(x_\nu)$, H-непрерывно продолжимые в точку $x_\nu = +0$, причем предельные значения производных связаны равенством

$$\lambda_1'(+0)\cdot\lambda_2'(+0)\cdot\ldots\cdot\lambda_k'(+0) = (-1)^k. \tag{4}$$

Это предположение распространяется на все неподвижные циклы порядка k и на все возможные значения k. Можно показать, что указанные здесь ограничения на функцию $\tau = \alpha(t)$ не зависят от выбора стандартных локальных координат.

3. На конфигурации ставится двухэлементная краевая задача:

$$\varphi[\alpha(t)] = G(t)\varphi(t) + g(t), \qquad \mathscr{I}^{-1}\mathscr{D}^{-1} \mid (\varphi), \qquad t \in \partial\mathfrak{M}. \tag{5}$$

Здесь $\varphi(p)$ — неизвестная функция, мероморфная на $\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M}$, кратная там наперед заданному дивизору $\mathscr{D}^{-1}$, H-непрерывно продолжимая на $\partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$, где должно выполняться равенство (5). В окрестности точек дивизора Λ искомая функция должна быть псевдократной ([3], [4]) дивизору $\mathscr{I}^{-1}$. Дивизор $\mathscr{I}$ составлен из точек дивизора Λ так, что все точки, входящие в один и тот же неподвижный цикл, входят в $\mathscr{I}$ с одинаковой кратностью. Коэффициенты $G(t) \neq 0$ и $g(t)$ краевого условия (5) предполагаются H-непрерывными на $\partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$, причем $\mathscr{I}^{-1} \mid (g)$. Функция $G(t) \neq 0$ считается H-непрерывно продолжимой слева и справа на все точки дивизора Λ. Получающиеся при этом предельные значения предполагаются конечными и отличными от нуля. Кроме того, предполагаются выполненными тождества

$$G(t)G[\alpha(t)] \equiv 1, \quad g(t)G[\alpha(t)] + g[\alpha(t)] \equiv 0, \quad t \in \partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda. \tag{6}$$

Постановка двухэлементной краевой задачи является весьма общей и содержит, например, следующие классические краевые задачи: Дирихле, Неймана, Римана, Гильберта, Карлемана, типа Карлемана, Газемана, типа Газемана и другие ([5]). Качественно новым моментом в постановке задачи (5) является разрывность функции «сдвига» $\tau = \alpha(t)$ (если ее считать заданной всюду на $\partial\mathfrak{M}$). Задача (5) допускает полное исследование излагаемым ниже методом локально-конформного склеивания, который был впервые предложен автором в работах ([6], [7]). В настоящей работе предлагается новая конструкция для обоснования метода, позволяющая значительно расширить сферу приложений метода.

4. Введем на множестве $\mathfrak{M}$ отношение эквивалентности по следующему правилу. Каждая точка $q \in \mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M}$ считается эквивалентной только самой себе. Далее, каждая точка $t \in \partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$ считается эквивалентной себе и точке $\alpha(t) \in \partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda$. И, наконец, если $t_1 \in \Lambda$, то считаются эквивалентными между собой все точки неподвижного цикла, содержащего точку t_1. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех классов эквивалентности. Задавая фактор-отображение σ

$$\sigma : \mathfrak{M} \xrightarrow{\text{на}} \mathfrak{S}, \tag{7}$$

превратим $\mathfrak{S}$ в топологическое пространство, снабдив его фактор-топологией.

Теорема 1. *При ограничениях, указанных в п. 1, пространство $\mathfrak{S}$ является замкнутым ориентируемым двумерным многообразием, состоящим из конечного числа связных компонент. При ограничениях, указанных в п. 1, 2, на многообразии $\mathfrak{S}$ существует единственная (с точностью до эквивалентных) конформная структура такая, что сужение отображения (7) на множество $\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M}$ есть конформный гомеоморфизм, который продолжается до H-гладкого гомеоморфизма на каждое из множеств $\partial\mathfrak{M}_\nu\setminus\Lambda_\nu$.*

Топологическая часть этой теоремы легко доказывается методами топологии поверхностей ([1, 2]). В случае, когда поверхность $\mathfrak{S}$ связна, легко вычисляется ее род ρ:

$$\rho = 1 - n + \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu - \frac{\operatorname{ord}\Lambda}{4} - \frac{ц}{2}, \tag{8}$$

где h_ν — род, k_ν — число компонент края поверхности $\mathfrak{M}_\nu$, ц — общее число неподвижных циклов. Доказательство конформной части сводится к построению на $\mathfrak{S}$ конформной структуры с требуемыми свойствами. На множестве $\sigma(\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M})\subset\mathfrak{S}$ конформная структура строится просто как образ конформных структур римановых поверхностей $\mathfrak{M}_\nu\setminus\partial\mathfrak{M}_\nu$ при отображении (7). Наибольшую трудность представляет построение конформной структуры в окрестности множества $\sigma(\partial\mathfrak{M})\subset\mathfrak{S}$. За локальный параметр окрестности U каждой точки множества $\sigma(\partial\mathfrak{M})$ принимается функция, однолистная в этой окрестности и аналитическая на $U\cap\sigma(\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M})$. Построение этой функции сводится к построению функции, осуществляющей конформное склеивание окрестностей эквивалентных точек данной конфигурации.

5. Основная идея метода локально-конформного склеивания состоит в переформулировке краевой задачи, поставленной на конфигурации, как некоторой краевой задачи на римановой поверхности $\mathfrak{S}$. Наиболее эффектно метод работает для двухэлементных краевых задач, поэтому мы изложим его здесь на примере задачи (5). С этой целью найдем образы всех объектов, входящих в постановку задачи (5), при «склеивающем» отображении (7). Так как сужение отображения (7) на $\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M}$ есть конформный гомеоморфизм, то образом дивизора $\mathscr{D}$ является дивизор $\sigma(\mathscr{D})$ (с сохранением кратностей всех точек), а функция

$$F(q) = \varphi[\sigma^{-1}(q)], \qquad q\in\sigma(\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M})\subset\mathfrak{S}, \tag{9}$$

является мероморфной на $\sigma(\mathfrak{M}\setminus\partial\mathfrak{M})$, кратной там дивизору $\sigma(\mathscr{D}^{-1})$, H-непрерывно продолжимой слева и справа на $\sigma(\partial\mathfrak{M}\setminus\Lambda)$. Образом при отображении (7) неподвижного цикла порядка k, взятого с кратностью $+1$, является квазидивизор, состоящий из одной точки, взятой с кратностью $^1/_2k$. Ввиду этого символ $\sigma(\mathscr{J})$ есть вполне определенный квазидивизор. Обозначая $\Gamma=\sigma(\partial\mathfrak{M})$, получаем на основании теоремы 1, что Γ есть сложный кусочно-гладкий контур ([3, 4]) на $\mathfrak{S}$.

Чтобы найти образ краевого условия (5) при отображении (7), необходимо задать на Γ ориентацию. С этой целью разобьем $\partial\mathfrak{M}$ на два множества Σ_1 и Σ_2 такие, что

$$\Sigma_1\cup\Sigma_2=\partial\mathfrak{M},\qquad \Sigma_1\cap\Sigma_2=\Lambda,\qquad \alpha(\Sigma_1)=\Sigma_2,\qquad \alpha(\Sigma_2)=\Sigma_1.$$

Сужение отображения (7) на внутренность каждого из множеств Σ_1 и Σ_2 есть гомеоморфизм. Поэтому каждое из отображений

$$\sigma\colon\ \Sigma_1\overset{\text{на}}{\to}\Gamma,\qquad \sigma\colon\ \Sigma_2\overset{\text{на}}{\to}\Gamma \tag{10}$$

индуцирует на Γ ориентацию. Эти ориентации противоположны одна другой. Условимся считать положительной ту ориентацию контура Γ, которая индуцируется вторым из отображений (10).

В силу тождеств (6) краевое условие (5) достаточно задать только на одном из множеств Σ_1 или Σ_2. Условимся считать, что оно задано только на Σ_1. Тогда однозначно определены функции

$$H(\tau) = G[\sigma^{-1}(\tau)] = G(t), \quad h(\tau) = g[\sigma^{-1}(\tau)] = g(t),$$
$$\tau \in \Gamma; \quad t = \sigma^{-1}(\tau) \in \Sigma_1.$$

Обозначая, как обычно, левые и правые предельные значения функций значками «+» и «—» сверху, будем иметь при $\tau \in \Gamma$

$$\varphi(t) = \varphi[\sigma^{-1}(\tau^-)] = F(\tau^-) = F^-(\tau), \quad \tau^- \in \Gamma, \quad t \in \Sigma_1;$$
$$\varphi[\alpha(t)] = \varphi[\sigma^{-1}(\tau^+)] = F(\tau^+) = F^+(\tau), \quad \tau^+ \in \Gamma, \quad \alpha(t) \in \Sigma_2.$$

Подставляя найденные объекты в краевое условие (5), приходим к краевой задаче Римана на римановой поверхности $\mathfrak{S}$

$$F^+(\tau) = H(\tau) F^-(\tau) + h(\tau), \quad \sigma(\mathscr{J}^{-1})\, \sigma(\mathscr{D}^{-1}) \wr (F), \ \tau \in \Gamma. \tag{11}$$

Эта задача равносильна краевой задаче (5). Известна ([3], [4]) довольно полная теория краевой задачи (11). Тем самым все результаты, известные для задачи (11), можно переформулировать и для задачи (5). Здесь мы сформулируем только некоторые результаты, полученные этим способом для задачи (5) в том частном случае, когда поверхность $\mathfrak{S}$ связна, а символ $\sigma(\mathscr{J})$ — дивизор. Пусть $\varkappa$ — индекс коэффициента $H(\tau)$, вычисляемый согласно алгоритму, указанному в ([3], [4]).

Теорема 2. *Пусть l — число решений однородной задачи* (5), *а l' — число решений краевой задачи*

$$d\psi(t) = G(t) \cdot d\psi[\alpha(t)], \quad \mathscr{J}\mathscr{D} \| (d\psi), \quad t \in \partial\mathfrak{M}, \tag{12}$$

для дифференциалов. Индекс задачи (5) *вычисляется по формуле*

$$l - l' = \varkappa + \operatorname{ord} \mathscr{D} + \operatorname{ord} \sigma(\mathscr{J}) - \rho + 1.$$

Если $\varkappa + \operatorname{ord} \mathscr{D} + \operatorname{ord} \sigma(\mathscr{J}) > 2\rho - 2$, *то* $l' = 0$. *Если* $\varkappa + \operatorname{ord} \mathscr{D} + \operatorname{ord} \sigma(\mathscr{J}) < 0$, *то* $l = 0$. *В «особом случае»* $0 \leqslant \varkappa + \operatorname{ord} \mathscr{D} + \operatorname{ord} \sigma(\mathscr{J}) \leqslant 2\rho - 2$ *имеет место точная оценка*

$$\max\{0, \varkappa + \operatorname{ord} \mathscr{D} + \operatorname{ord} \sigma(\mathscr{J}) - \rho + 1\} \leqslant l \leqslant \left[\frac{\varkappa + \operatorname{ord} \mathscr{D} + \operatorname{ord} \sigma(\mathscr{J})}{2}\right] + 1.$$

Равенства

$$\int_{\Sigma_1} g(t)\, d\psi[\alpha(t)] = 0$$

дают критерий разрешимости неоднородной задачи (5).

Одесский инженерно-строительный институт

Поступило 21 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, 1960. [2] М. Шифер, Д. К. Спенсер, Функционалы на конечных римановых поверхностях, ИЛ, 1957. [3] Э. И. Зверович, УМН, 26, 1 (157) (1971). [4] Э. И. Зверович, ДАН, 198, № 1 (1971). [5] Д. А. Квеселава, Тр. Матем. инст. АН ГрузССР, 16 (1948). [6] Э. И. Зверович, ДАН, 157, № 1 (1964). [7] Э. И. Зверович, Сибирск. матем. журн., 7, № 4 (1966).