Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 4

УДК 513

МАТЕМАТИКА

Ю. ЛИСИЦА

О ПРОСТРАНСТВАХ СВЯЗНЫХ И ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫХ ВО ВСЕХ РАЗМЕРНОСТЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 I 1972)

Известная теорема Куратовского — Дугунджи ([1], [2]), дающая характеристику пространств, связных и локально связных в размерности n ($C^n \cap \cap LC^n$), а также пространств локально связных в размерности n (LC^n), распространяется здесь на пространства, связные и локально связные во всех размерностях ($C^\infty \cap LC^\infty$), и соответственно на пространства, лишь локально связные во всех размерностях (LC^∞) (теорема 1) *.

Первое из приведенных здесь характеристических свойств дополнения $X \setminus A$ (определение 2), позволяющее продолжать отображения ** f: $A \to \to Y$ в пространства Y перечисленных классов, имеет размерностный характер, но является топологическим свойством вложения *** i: $X \setminus A \to X$, а не самого подпространства $X \setminus A$. Однако это необходимо, если дополнительно желать в рассматриваемом бесконечномерном случае выполнения некоего аналога теоремы П. С. Александрова ([3]) о продолжении отображений в сферы (теорема 3). Роль бесконечномерной «сферы» играет у нас видоизменение одного замечательного пространства Борсука ([4]).

Вторым приводимым здесь характеристическим свойством дополнения $X \setminus A$ неожиданно оказалось чисто топологическое свойство быть слабо бесконечномерным в смысле Ю. М. Смирнова (теорема 2).

В конце рассматривается вопрос о возможных заменах пространства Борсука и некоторые из результатов распространяются на пространства более общие, чем метризуемые.

А. Локально конечномерные вложения.

Определение 1. Пространство X назовем локально конечномерным, если каждая его точка обладает конечномерной окрестностью.

Определение 2. Скажем, что открытое множество H вложено в пространство X локально конечномерно, если каждая точка x пространства X обладает такой окрестностью O_x, что $\dim (H \cap O_x) < \infty$.

Свойства локально конечномерного вложения.

1) Пространство X локально конечномерно тогда и только тогда, когда вложение $X \subset X$ локально конечномерно.

2) Всякое открытое множество локально конечномерного пространства вложено в него локально конечномерно.

3) Открытое множество H вложено в пространство X локально конечномерно тогда и только тогда, когда существует такое локально конечное замкнутое покрытие $\{\Phi_\lambda\}$ пространства X, что $\dim (H \cap \Phi_\lambda) < \infty$ для всех Φ_λ.

4) Открытое множество H вложено в пространство X локально конечномерно тогда и только тогда, когда H является таким объединением счетного числа возрастающих открытых конечномерных множеств H_k, что вся-

* Подобная характеристика, найденная Дугунджи ([2]), слишком слаба с нашей точки зрения: для нее не выполняется аналог теоремы П. С. Александрова, о котором говорится ниже.

** Под отображениями всюду понимаются непрерывные отображения.

*** Под вложениями понимаются гомеоморфизмы одного пространства на часть другого.

кая сходящаяся в X последовательность точек множества H почти вся * лежит в одном из H_k.

B. Характеристика классов LC^∞ и $C^\infty \cap LC^\infty$.

Теорема 1. *Пространство $Y \in LC^\infty$ (соответственно $C^\infty \cap LC^\infty$) тогда и только тогда, когда для всякого пространства X и всякого такого замкнутого его подмножества A, что $X \setminus A$ вложено в X локально конечномерно, всякое отображение $f\colon A \to Y$ продолжаемо на некоторую окрестность множества A (соответственно на все X).*

Замечание 1. Основной частью теоремы является необходимая часть, так как достаточность непосредственно вытекает из классической теоремы Куратовского для компактов.

Замечание 2. Условие теоремы можно ослабить, заменив требование локальной конечномерности вложения $i\colon X \setminus A \to X$ на следующее: множество A имеет такую окрестность OA, что вложение $i\colon OA \setminus A \to OA$ локально конечномерно.

Замечание 3. Условие теоремы 1 можно усилить, потребовав, чтобы пространство X было локально конечномерным взамен локальной конечномерности вложения $i\colon X \setminus A \to X$.

Теорема 2 получается, если заменить требование локальной конечномерности вложения $i\colon X \setminus A \to X$ на следующее: *разность $X \setminus A$ слабо бесконечномерна в смысле Ю. М. Смирнова* ([5]).

C. Характеристика локально бесконечномерных вложений с помощью продолжения отображений. Пусть Y_0 — конус над компактом $X_\infty \in LC^\infty$, построенным Борсуком (([4]), стр. 34).

Теорема 3. *Открытое множество H вложено в пространство X локально конечномерно тогда и только тогда, когда для всякого замкнутого в X множества A, содержащего разность $X \setminus H$, всякое отображение $f\colon A \to Y_0$ можно продолжить на все X.*

Следствие. *Пространство X локально конечномерно тогда и только тогда, когда для всякого его замкнутого множества A всякое отображение $f\colon A \to Y_0$ продолжаемо на все X.*

Итак, компакт Y_0 характеризует локально конечномерные пространства точно так же, как n-мерная сфера характеризует пространства размерности $\leqslant n$. Поэтому мы осмелимся временно называть пространство Y_0, вместе с ним и все другие пространства Y, удовлетворяющие утверждению следствия, бесконечномерными «сферами». Но сходство с конечномерными сферами не так велико, как хотелось бы видеть.

Теорема 4. *Всякое локально конечномерное пространство класса $C^\infty \cap LC^\infty$ (соответственно LC^∞) является абсолютным (соответственно окрестностным) ретрактом.*

Следствие. *Никакая бесконечномерная «сфера» не может быть абсолютным окрестностным ретрактом и не может быть локально конечномерной.*

D. Распространение результатов на более общие классы пространств, чем метризуемые.

1) Леммы 1 и 2 верны в нормальных пространствах, а лемма 3 — в паракомпактных пространствах.

2) Теорема 1 верна в предположении, что X паракомпактно и наследственно нормально (одновременно), а Y, как и ранее, метризуемо, но для этого нужно в определении 2 заменить размерность $\dim(H \cap O_x)$ на относительную размерность $\mathrm{rd}_X(H \cap O_x)$ в следующем смысле: $\mathrm{rd}_X \Gamma = \sup\limits_{A \subset \Gamma} \dim \beta A$, где верхняя грань берется по всем вполне замкнутым ** в X множествам A, лежащим в

* Т. е. за исключением конечного числа точек x_i.

** Замкнутое множество A называется вполне замкнутым ([6]), если всякое отображение $f\colon A \to I$ в отрезок I продолжается на все X. Это эквивалентно тому, что $\beta A = \bar{A}$, где замыкание берется в чеховском расширении βX.

множестве Г. Если X нормально, то $\mathrm{rd}_X \Gamma = \sup_{A \subseteq \Gamma} \dim A$, где A — замкнутые в X множества. Если же X метризуемо, а Г открыто в X, то $\mathrm{rd}_X \Gamma = \dim \Gamma$.

3) Замечания 2 и 3 остаются верными и в этом общем случае.

4) Теорема 3 и ее следствие справедливы в предположении, что X — паракомпактное пространство с первой аксиомой счетности.

В заключение, с согласия их автора (Ю. М. Смирнов), приведем три проблемы:

Проблема 1. Существуют ли однородные бесконечномерные «сферы»?

Проблема 2. Существуют ли локально стягиваемые бесконечномерные «сферы»??

Проблема 3. Существуют ли компактные однородные стягиваемые и локально стягиваемые бесконечномерные «сферы»???

Пользуясь случаем, я выражаю искреннюю благодарность проф. Ю. М. Смирнову за внимание к моей работе, за помощь и поддержку.

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы
Москва

Поступило
20 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Куратовский, Топология, 2, М., 1969. [2] J. Dugundji, Comp. Math., **13**, 229 (1958). [3] P. Alexandroff, Proc. Roy. Soc. A, **189**, 11 (1947). [4] К. Борсук, Теория ретрактов, М., 1971. [5] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **58** (100), № 4, 415 (1962). [6] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **38** (80), 271 (1956).