Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 4

УДК 517.947.44

МАТЕМАТИКА

Л. А. МУРАВЕЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 27 I 1972)

Во внешности Ω замкнутого выпуклого контура Γ рассмотрим функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям

$$\partial^2 u(x, t) / \partial t^2 = \Delta u(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$u(x, t)\,|_{t=0} = f_1(x), \quad \partial u(x, t) / \partial t\,|_{t=0} = f_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}; \tag{2}$$

$$\partial u(x, t) / \partial n + g(x) u(x, t)\,|_{x \in \Gamma} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$, n — вектор внешней по отношению к Ω единичной нормали к контуру Γ.

Контур Γ предполагается дважды гладким, имеющим положительную кривизну, функция $g(x)$ — неотрицательной, непрерывно дифференцируемой на Γ, функции $f_\alpha(x)$, $\alpha = 1, -\alpha + 1$ раз непрерывно дифференцируемыми в $\bar{\Omega}$, равными нулю при достаточно больших по модулю значениях x и удовлетворяющими условиям согласования

$$\partial f_\alpha(x) / \partial n + g(x) f_\alpha(x)\,|_{x \in \Gamma} = 0, \quad \alpha = 0, 1.$$

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения решения $u(x, t)$ задачи (1)—(3) в произвольной точке $x \in \bar{\Omega}$ при $t \to \infty$.

Теорема. *При $g(x) \not\equiv 0$ в любой точке $x \in \bar{\Omega}$ для функций $u_\alpha(x, t)$, $\alpha = 0, 1$, при $t \to \infty$ имеют место равенства*

$$u_\alpha(x, t) = (-1)^\alpha \frac{\varphi^{(\alpha)}(t)}{t^{1+\alpha} \ln^2 t} \nu(x) \iint\limits_{\Omega} \mu(y) f_\alpha(y)\, dy + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{n-1} c_{m,n}^{(\alpha)}(x) \frac{\ln^m t}{t^{2n+1+\alpha}} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=2}^{n+2} d_{m,n}^{(\alpha)}(x) \frac{\varphi_{m,n}^{(\alpha)}(t)}{t^{2n+1+\alpha} \ln^m t} + \tilde{u}_N^{(\alpha)}(x, t),$$

где функции $u_\alpha(x, t)$, $\alpha = 0, 1$,— решения задачи (1) — (3) при $f_{1-\alpha} = 0$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ — некоторые функции (зависящие от Γ и g), гармонические в Ω, непрерывные в $\bar{\Omega}$, функции $c_{m,n}^{(\alpha)}(x)$ и $d_{m,n}^{(\alpha)}(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$, функции $\varphi^{(\alpha)}(t)$ и $\varphi_{m,n}^{(\alpha)}(t)$ непрерывны по t и имеют конечные отличные от нуля пределы при $t \to \infty$, N — произвольное целое положительное число; для функций $\tilde{u}_N^{(\alpha)}(x, t)$ при $x \in \bar{\Omega} \cap \{|x| \leqslant R\}$ и $t \geqslant T_\alpha$ справедливы оценки

$$|\tilde{u}_N^{(\alpha)}(x, t)| \leqslant C_\alpha \ln^N t / t^{2N+3+\alpha},$$

положительные постоянные T_α, C_α зависят от N, Γ, f_α и R, $\alpha = 0, 1$, R — произвольное достаточно большое положительное число.

Асимптотическое поведение функций $u_\alpha(x, t)$ при $t \to \infty$ исследуется методом аналитического продолжения функции Грина для уравнения Гельмгольца, предложенным В. П. Михайловым ([1]) при установлении экспоненциального убывания решений второй и третьей внешней краевых задач для волнового уравнения с тремя пространственными переменными.

В случае $g(x)=0$ (вторая краевая задача) в работах ([2-4]) было установлено, что в любой точке $x \in \bar{\Omega}$ при $t \to \infty$ для функций $u_\alpha(x, t)$ имеют место равенства

$$u_\alpha(x, t) = \frac{(-1)^\alpha}{2\pi t^{1+\alpha}} \iint\limits_{\Omega} f_\alpha(y)\,dy + (-1)^{1+\alpha}(2+\alpha)!\,\frac{\operatorname{mes}(E_2 \setminus \Omega)}{\pi}\,\frac{\ln t}{t^{3+\alpha}} \iint\limits_{\Omega} f_\alpha(y)\,dy + O_x(1/t^{3+\alpha}),$$

т. е. решения второй краевой задачи имеют, вообще говоря, более низкий, чем решения третьей краевой задачи порядок стремления к нулю при $t \to \infty$.

Пусть $G(x, y, k)$, $x, y \in \bar{\Omega}$,— функция Грина уравнения $\Delta v(x) + k^2 v(x) = f(x)$ в области Ω, удовлетворяющая граничному условию (3) и условию излучения при $|x| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$. Для наших целей требуется изучить аналитическое продолжение функции G в область

$$K_\beta = \{k\colon |\operatorname{Im} k| < \beta(1 + |\operatorname{Re} k|^{1/3}),\ \operatorname{Re} k \neq 0 \text{ при } -\beta < \operatorname{Im} k \leqslant 0\}$$

при каком-нибудь $\beta > 0$.

При сделанных предположениях относительно контура Γ и функции g имеет место следующая

Лемма 1. *Существуют такие положительные числа* $\beta = \beta(\Gamma, g)$ *и* $\varkappa = \varkappa(\Gamma, g)$, *что при любых* $x, y \in \bar{\Omega}$, $x \neq y$, *функция* $G(x, y, k)$ *допускает аналитическое продолжение в область* $K_\beta \cap \{|\operatorname{Re} k| > \varkappa\}$ *с оценками: при* $x, y \in \Gamma$

$$|G(x, y, k)| \leqslant C|k|^{1/6}\Big[\int\limits_{|k|^{-1/3}}^{1} \tau^{1/2} \exp\{-B|k||x-y|\tau^2\}\,d\tau + |\ln(|k||x-y|)|\exp\{-B|k||x-y|\}\Big] + C_1|k|^{-1/3}\exp\{-B_1|x-y||k|^{-1/3}\}$$

и при $x \in \Gamma$, $y \in \bar{\Omega}$ *или* $y \in \Gamma$, $x \in \bar{\Omega}$

$$|G(x, y, k)| \leqslant C_1|k|^{-1/6}|x-y|^{-1/2}\exp\{-\operatorname{Im} k|x-y| + D|\operatorname{Im} k|\},$$

где постоянные C, B *и* D *зависят от* Γ *и постоянная* C_1 — *от* Γ *и* g.

Лемма 1 доказывается из рассмотрения интегрального уравнения типа, предложенного Ф. Эрселом ([5]) в случае $g(x)=0$ при вещественных $k \to \infty$ и более высоких, чем у нас, требованиях на гладкость контура Γ, $\Gamma \in C^3$.

Для исследования аналитического продолжения функции G в область $K_\beta \cap \{|\operatorname{Re} k| < \varkappa\}$ используем интегральное уравнение с аналитически зависящим от k в области K_β (при любом $\beta > 0$) ядром Гильберта — Шмидта; это интегральное уравнение следует из работы И. Н. Векуа ([6]). Рассматривая это уравнение при $k \to 0$, доказываем следующее утверждение.

Лемма 2. *При* $g(x) \not\equiv 0$ *существует такое* $\beta = \beta(\Gamma, g) > 0$, *что при* $k \in K_\beta \cap \{|k| < \beta\}$ *и* $x, y \in \bar{\Omega}$ *для функции* $G(x, y, k)$ *справедливо представление в виде ряда*

$$G(x, y, k) = G_0(x, y) + \mu(x)\nu(y)/\ln(k\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n-1}^{n} G_{m,n}(x, y)\,k^{2n}\ln^m(k\gamma), \tag{5}$$

где $\mu(x)$, $\nu(y)$ — *некоторые функции (зависящие от* Γ *и* g*), гармонические в* Ω, *непрерывные в* $\bar{\Omega}$, *комплексное число* γ $(\neq 0)$ *зависит от* Γ *и* g, *функции* $G_{m,n}(x, y)$ *непрерывны по* $x, y \in \bar{\Omega}$ *и удовлетворяют неравенствам*

$$|G_{m,n}(x, y)| \leqslant D(R)B^n(\Gamma, g), \quad x, y \in \bar{\Omega} \cap \{|x| \leqslant R\},$$

для функции $G_0(x, y)$ *при* $x, y \in \bar{\Omega} \cap \{|x| \leqslant R\}$ *справедлива оценка*

$$|G_0(x, y)| \leqslant C(R, \Gamma, g)\,|x-y|^{-1/2};$$

ряд (5) *(без выделенных членов) сходится равномерно по* $k \in \{|k| \leqslant \beta\}$ *и* $x, y \in \bar{\Omega} \cap \{|x| \leqslant R\}$.

При $g(x)=0$ функция $G(x, y, k)$ (в отличие от случая $g(x)\not\equiv 0$) не имеет предела при $k\to 0$, для этой функции при $x, y\in\overline{\Omega}\cap\{|x|\leqslant R\}$ и $k\in K_\beta\cap\{|k|<\beta\}$ справедливо разложение ([3, 4])

$$G(x, y, k)=G_0(x, y)-\frac{1}{2\pi}\ln(k\gamma)+\frac{\operatorname{mes}(E_2\diagdown\Omega)}{4\pi^2}k^2\ln^2 k+O_R(k^2),$$

где γ — некоторое не зависящее от Γ комплексное число.

Отметим, что аналогичное интегральное уравнение при $g(x)=0$ и $k\to\to 0$ изучалось в ([7]).

На основании теоремы Я. Д. Тамаркина ([8]) об аналитически зависящих от параметра интегральных операторах с ядром Гильберта — Шмидта заключаем, что для любого $\varkappa>1$ существует $\beta=\beta(\Gamma, g, \varkappa)>0$ такое, что при любых $x, y\in\overline{\Omega}$ $(x\neq y)$ функция $G(x, y, k)$ допускает аналитическое продолжение в область $K_\beta\cap\{\varkappa^{-1}<|\operatorname{Re}k|<\varkappa\}$ с легко устанавливаемой методами потенциалов оценкой

$$|G(x, y, k)|\leqslant C(\Gamma, g, R, \varkappa)|x-y|^{-1/2},\qquad x, y\in\overline{\Omega}\cap\{|x|\leqslant R\}. \qquad (6)$$

Таким образом, полностью исследовано аналитическое продолжение функции $G(x, y, k)$ в область K_β при некотором $\beta=\beta(\Gamma, g)>0$.

В предположениях работы функции $u_\alpha(x, t)$, $\alpha=0, 1$, представляются в виде

$$u_\alpha(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\operatorname{Im}k=\varepsilon}e^{-ikt}U_\alpha(x, k)\,dk, \qquad (7)$$

где ε — произвольное положительное число и $U_\alpha(x, k)$, $\alpha=0, 1$,— решения уравнений

$$\Delta U_\alpha(x, k)+k^2U_\alpha(x, k)=(ik)^\alpha f_\alpha(x),\qquad x\in\Omega,$$

удовлетворяющие условию (3) и при $\operatorname{Im}k\geqslant 0$, $k\neq 0$, условию изложения при $|x|\to\infty$.

На основании лемм 1, 2, оценки (6) и свойств функций f_α, $\alpha=0, 1$, функции $U_\alpha(x, k)$, $\alpha=0, 1$, при любом $x\in\overline{\Omega}$ допускают аналитическое продолжение в область

$$\{|\operatorname{Im}k|<\beta(1+|\operatorname{Re}k|^{1/3-\sigma})\}\cap\{|k|>\beta\},\qquad 0\leqslant\sigma\leqslant 1/3,$$

с оценками

$$|U_\alpha(x, k)|\leqslant C_\alpha|k|^{-(\sigma+1/\sigma)}\exp\{|\operatorname{Im}k|(R+D_\alpha)\},\qquad x\in\overline{\Omega}\cap\{|x|\leqslant R\}, \qquad (8)$$

где R произвольно, постоянные D_α, $\alpha=0, 1$, зависят от Γ и $\operatorname{diam}\operatorname{supp}f_\alpha$, постоянные C_α, $\alpha=0, 1$, — от Γ, g, f_α и R.

Оценка (8) позволяет при любом $t\geqslant T_\alpha=3(R+D_\alpha)$ и $0<\sigma<1/6$ интеграл в (7) преобразовать к виду

$$u_\alpha(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|k|=\beta}e^{-ikt}U_\alpha(x, k)\,dk+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\operatorname{Im}k=-\beta(1+|\operatorname{Re}k|^{1/3-\sigma})}e^{-ikt}U_\alpha(x, k)\,dk=$$

$$=u_\alpha^{(1)}(x, t)+u_\alpha^{(2)}(x, t),$$

причем для функций $u_\alpha^{(2)}(x, t)$, $\alpha=0, 1$, при $x\in\overline{\Omega}\cap\{|x|\leqslant R\}$ и $t\geqslant T_\alpha$ имеют место оценки

$$|u_\alpha^{(2)}(x, t)|\leqslant C(\Gamma, g, f_\alpha, R)\,e^{-\beta t/3}.$$

Используя лемму 2 и проводя аналогичные ([3, 4]) рассмотрения, получаем для функций $u_\alpha^{(1)}(x, t)$ при $t\to\infty$ асимптотические разложения (4).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 20 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Михайлов, ДАН, 159, № 4, 756 (1964). [2] Л. А. Муравей, ДАН, 193, № 5, 996 (1970). [3] Л. А. Муравей, Дифференциальные уравнения, 6, № 12, 2248 (1970). [4] Л. А. Муравей, Кандидатская диссертация, Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР (1971). [5] F. Ursell, Proc. Cambr. Phil. Soc., 53, № 1, 115 (1957). [6] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисск. матем. инст., 12, 105 (1943). [7] R. C. MacCamy, Quart. Appl. Math., 23, № 3, 246 (1965). [8] J. D. Tamarkin, Ann. Math., 28, 127 (1927).