

М. А. НАЙМАРК

ОБ ОДНОРОДНЫХ И КВАЗИОДНОРОДНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 25 I 1972)

В статье автора ⁽¹⁾ было введено понятие однородного унитарного представления комплексной полупростой группы Ли. В данной статье для непрерывных представлений произвольной локально компактной группы в полном локально выпуклом пространстве введены понятия квазиоднородного и однородного представлений и исследованы различные свойства таких представлений.

1. Обозначения. Всюду в этой статье G обозначает локально компактную группу, $X = C_0(G)$ — ее групповую алгебру с умножением — сверткой комплекснозначных непрерывных функций на G с компактным носителем, U — фиксированную компактную подгруппу группы G , $c: u \rightarrow c(u)$ — неприводимое представление группы U , r_c — размерность, χ_c — характер представления c , $c_{ij}(u)$ — матричные элементы оператора $c(u)$ в фиксированном ортонормальном базисе, $T: g \rightarrow T(g)$ — непрерывное представление группы G в полном локально выпуклом бочечном пространстве $E \neq (0)$, T — сопряженное представление в сопряженном пространстве E' , определенное формулой

$$\hat{T}(g) = (T(g^{-1}))^i,$$

где A' обозначает оператор в E' , сопряженный к оператору A . Представление T порождает представление алгебры X (обозначим его также T) по формуле $T: x \rightarrow T(x) = \int x(g)T(g)dg$, где dg — дифференциал левоинвариантной меры на G .

Если M — замкнутое подпространство, инвариантное относительно T , то T^M обозначает сужение T на M , а T_M — представление, порожденное представлением T в фактор-пространстве E/M .

Вообще для непрерывного линейного оператора A в E с замкнутым инвариантным подпространством $M \subset E$ через A^M обозначим сужение A на M , а через A_M — оператор, порожденный оператором A в E/M .

Для данных T и c положим * (см., например, ^(2, 3) и ⁽⁴⁾)

$$T_j^c = r_c \int \overline{c_{jj}(u)} T_u du.$$

2. Определение и простейшие свойства квазиоднородных и однородных представлений. Представление T называется квазиоднородным относительно U , c , если **

$$[T(g)T_j^c E, g \in G] = E.$$

Это определение не зависит от выбора индекса j .

* Здесь и всюду в дальнейшем du обозначает дифференциал меры Хаара на U , нормированный условием $du = 1$.

** Для краткости мы пишем $[\cdot]$ вместо $\{\{\cdot\}\}$, где $\{\cdot\}$ — рассматриваемое множество, например, $\{T(g)T_j^c, g \in G\}$, а $\{\{\cdot\}\}$ обозначает замкнутую линейную оболочку множества $\{\cdot\}$.

I. Если T квазиоднородно относительно U , s и если существует линейное топологическое отображение S пространства E на E' , при котором T переходит в $\tilde{T}$, то T однородно относительно U, s .

В частности,

II. Если T унитарно в гильбертовом пространстве E и T квазиоднородно относительно U, s , то T однородно относительно U, s .

III. Если $E = \Pi_k$, $k \leq \infty$, и T унитарно относительно indefinite скалярного произведения в Π_k и квазиоднородно относительно U, s , то T однородно относительно U, s .

IV. Если T — представление в E , квазиоднородно относительно U, s , а $M \neq E$ — замкнутое подпространство в E , инвариантное относительно T , то T_M также квазиоднородно относительно U, s .

V. Пусть T — представление группы G в E . Если T квазиоднородно относительно U, s , то

1) сужение T на U содержит s ;

2) для каждого замкнутого подпространства $M \subset E$, $M \neq (0)$ инвариантного относительно T :

а) $(\hat{T}^M)$ квазиоднородно относительно U, s ,

б) сужение T^M на U содержит s ,

с) существует замкнутое подпространство $M_1 \subset M$, $M_1 \neq (0)$, инвариантное относительно T , для которого T^{M_1} однородно.

VI. Пусть T — представление в пространстве E , однородное относительно U, s . Если $M \neq (0)$ — замкнутое подпространство в E инвариантно относительно T и удовлетворяет условию

а) в E существует непрерывный проектор P на M , перестановочный со всеми $T(g)$, $g \in G$, то T^M также однородно относительно U, s .

Замечание. Пока остается открытым вопрос, справедливо ли утверждение предложения VI без выполнения условия а).

3. Дискретные суммы и прямые интегралы однородных представлений. Представление T в пространстве E будем называть дискретной суммой представлений T^α в пространствах E^α , где α пробегает заданное множество A , и писать $T = \sum_A T^\alpha$,

если в E существуют замкнутые подпространства M^α , $\alpha \in A$, инвариантные относительно T и обладающие следующими свойствами:

1) $[M^\alpha, \alpha \in A] = E$;

2) T^{M^α} топологически эквивалентно T^α .

Представление T в пространстве E будем называть дискретной C -суммой представлений T^α и писать $T = \sum_A C \cdot T^\alpha$, если при

тех же обозначениях кроме условий 1) и 2) выполняется еще:

3) для каждого $\alpha \in A$ существует непрерывный проектор P_α на M^α , перестановочный с каждым оператором $T(g)$, $g \in G$ и $\xi \in [P_\alpha \xi, \alpha \in A]$ для каждого $\xi \in A$.

I. Если $T = \sum_A T^\alpha$ и каждое T^α квазиоднородно относительно U, s , то T также квазиоднородно относительно U, s .

II. Если $T = \sum_A C \cdot T^\alpha$ и каждое T^α однородно относительно U, s , то T также однородно относительно U, s .

Представление T в гильбертовом пространстве E будем называть прямым интегралом представлений T^α в гильбертовых пространствах E^α , $\alpha \in A$, по мере μ и писать $T = \int_A T^\alpha d\mu$, если

1) A — пространство с мерой μ ;

2) E^α — μ -измеримое на A семейство гильбертовых пространств и

$$E = \int_A E^\alpha d\mu;$$

3) для каждого $g \in G$ операторная функция $T^\alpha(g)$ измерима по α и для каждого $g \in G$ и $\xi = \{\xi^\alpha\} \in E$

$$T(g)\xi = T(g)\{\xi^\alpha\} = \{T^\alpha(g)\xi^\alpha\};$$

4) для μ -почти каждого $\alpha \in A$ соответствие $T^\alpha: g \rightarrow T^\alpha(g)$ есть непрерывное представление группы G в E^α .

III. Пусть G — локально компактная группа со счетной базой окрестностей и $T, T^\alpha, \alpha \in A$ — непрерывные представления группы G в сепарабельных гильбертовых пространствах E, E^α .

Если $T = \int_A T^\alpha d\mu$, так что $E = \int_A E^\alpha d\mu$ и если для μ -почти каждого $\alpha \in A$ представление T^α квазиоднородно относительно U, c , то также T квазиоднородно относительно U, c .

IV. Пусть выполнены те же условия, что и в предложении III и пусть кроме того, T_α однородно относительно U, c для каждого $\alpha \in A - N$, где $\mu(N) = 0$.

Тогда T также однородно относительно U, c .

Используя предложения I—IV, легко построить примеры квазиоднородных и однородных представлений. Прежде всего, отметим, следующее простое предложение.

V. Если T неприводимо и $k(T, U, c) \neq 0$, то T однородно относительно U, c .

VI. Пусть $T = \sum_A T^\alpha$ и пусть для каждого $\alpha \in A$

1) $k(T^\alpha, U, c) \neq 0$; 2) T^α неприводимо.

Тогда T квазиоднородно относительно U, c .

VII. Пусть $T = \sum_A T^\alpha$, где $k(T^\alpha, U, c) \neq 0$ для каждого $\alpha \in A$

и пусть T^α неприводимо для каждого $\alpha \in A$.

Тогда T однородно относительно U, c .

VIII. Пусть G — локально компактная группа со счетной базой окрестностей и $T, T^\alpha, \alpha \in A$, — представления группы G в сепарабельных гильбертовых пространствах E, E^α . Пусть $T = \int_A T^\alpha d\mu$ (так что $E = \int_A E^\alpha d\mu$)

и пусть $k(T^\alpha, U, c) \neq 0$ для μ -почти каждого $\alpha \in A$.

Если T^α неприводимо для μ -почти каждого $\alpha \in A$, то T однородно относительно U, c .

Представление T в E называют зацеплением представлений $T^1, T^2, T^3, \dots$ и пишут $T = T^1 \rightarrow T^2 \rightarrow \dots$, если в E существуют замкнутые подпространства $M^1, M^2, M^3, \dots$, инвариантные относительно T и обладающие следующими свойствами: 1) $M^1 \subset M^2 \subset M^3 \dots$; 2) $E = [M^1, M^2, \dots]$; 3) $T_{M^1}, T_{M^2/M^1}, \dots$ топологически эквивалентны представлениям $T^1, T^2, \dots$.

IX. Пусть G — локально компактная группа, U — ее компактная подгруппа, обладающая счетной базой окрестностей, $c^1, c^2, \dots$ — полная система попарно неэквивалентных неприводимых представлений группы U .

Тогда всякое представление T группы G есть зацепление ее представлений $T^1, T^2, \dots$ квазиоднородных относительно U, c^1 ; $U, c^2, \dots$ соответственно, где $\{l_1, l_2, \dots\}$ — некоторое конечное или бесконечное подмножество натурального ряда и $l_1 < l_2 < l_3 \dots$.

X. Пусть G, U и $c^1, c^2, \dots$ — те же, что и в предложении IX.

Тогда всякое унитарное представление T группы G есть ортогональная прямая сумма ее представлений $T^1, T^2, \dots$ однородных относительно $U, c^1; U, c^2; \dots$, где $\{l_1, l_2, \dots\}$ — некоторое (конечное или бесконечное) подмножество натурального ряда и $l_1 < l_2 < \dots$.

Для частного случая, когда G — комплексная полупростая группа Ли, а U — ее максимальная компактная подгруппа, предложение X было ранее доказано автором (см. ⁽¹⁾, предложение III, п. 4).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
15 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. А. Наймарк, *Studia Mathematica*, **31**, 383 (1968). ² М. А. Наймарк, *Матем. сборн.*, **35** (77), 317 (1954); **37** (79), 121 (1955). ³ М. А. Наймарк, *Линейные представления группы Лоренца*, М., 1958. ⁴ Д. П. Желобенко, М. А. Наймарк, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **34**, 57 (1970).