

М. С. НИКОЛЬСКИЙ

**ЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ**

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 27 I 1972)

1. В n -мерном нормированном пространстве R^n происходит движение вектора z , подчиняющееся уравнению

$$\dot{z} = h(z, w), \quad z(0) = z_0, \quad (1)$$

где управление $w = w(t)$ — s -мерная измеримая вектор-функция, удовлетворяющая ограничению $w(t) \in W$ — компакт из нормированного R^s , $h(z, w)$ — непрерывная на $R^n \times W$ вектор-функция. Предполагается, что при произвольном допустимом управлении $w(t)$, $0 \leq t < +\infty$, решение уравнения (1) существует на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Определение 1. Объект z называется **линеаризуемым** для z_0 , если существует такая константа $t(z_0) \geq 0$, что при $t \geq t(z_0)$ произвольное решение $z(t)$ уравнения (1), соответствующее произвольному допустимому управлению $w(t)$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = Az + k(z, w), \quad (2)$$

где A — постоянная $(n \times n)$ -матрица, причем

$$k(z(t), w(t)) \in S, \quad (3)$$

где S — некоторый компакт из R^n .

Определение 2. Объект z называется **линеаризуемым**, если он линеаризуем для любого $z_0 \in R^n$, причем A, S (см. (2), (3)) не зависят от z_0 .

Определение 3. Пусть Z_1, Z_2 — произвольные непустые множества из R^n . Геометрической разностью (см. (1)) их называется множество Z_3 , состоящее из всех векторов $z \in R^n$, удовлетворяющих условию $z + Z_2 \subset Z_1$. Пишут $Z_3 = Z_1 * Z_2$.

Определение 4. Пусть $h(z, w)$ в (1) имеет вид $h(z, w) = h(z) + w$, где $w \in W \subset R^n$. Пусть объект z линеаризуем для z_0 и существует такая постоянная матрица A , что $-h(z(t)) + Az(t) \in S_1$ — компакт при $t \geq \tau(z_0) \geq 0$ для произвольной траектории $z(t)$ уравнения (1), причем множество $\Omega = W * S_1$ непусто. Тогда объект z называется **идеально линеаризуемым** для z_0 .

Определение 5. Объект z называется **идеально линеаризуемым**, если он идеально линеаризуем для каждого $z_0 \in R^n$, причем A, S_1 не зависят от z_0 .

Если объект z линеаризуем для z_0 , то при $t \geq t(z_0)$ любое решение уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = Az + \omega, \quad z(0) = z_0, \quad (4)$$

где $\omega = \omega(t)$ — n -мерная измеримая вектор-функция, удовлетворяющая ограничению $\omega(t) \in S$.

Если объект z идеально линеаризуем для z_0 , то при $t \geq \tau(z_0)$ управляющий объектом z имеет возможность, применяя управление $w(t) = w_1(t) + \omega(t)$, где $w_1(t) = -h(z(t)) + Az(t)$, $\omega(t) \in \Omega$, — произвольная n -мерная измеримая вектор-функция, добиться того, что решение $z(t)$ уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = Az + \omega(t), \quad z(0) = z_0. \quad (5)$$

2. Определение 6. Пусть r — произвольная $(n \times n)$ -матрица. Уравнение (1) называется **r -диссипативным**, если существует такая

функция $t(z_0) \geq 0$, что при $t \geq t(z_0)$ произвольное решение уравнения (1) удовлетворяет условию $rz(t) \in S_2$, где S_2 — компакт.

Если функция $h(z, w)$ (см. (1)) может быть представлена в виде $Az + l(z, w)$, где $l(z, w)$ ограничена по норме на любом множестве, на котором вектор rz ограничен по норме, то из r -диссипативности уравнения (1) следует линеаризуемость объекта z .

Условимся в дальнейшем буквой k с индексом обозначать константы, буквой E — единичную $(n \times n)$ -матрицу.

Теорема 1. Пусть при $\|z\| \geq k_1 > 0$ определена непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $v(z)$, удовлетворяющая условиям: $v(z) > 0$; $v(z) \rightarrow +\infty$ при $\|z\| \rightarrow +\infty$; $(\text{grad } v(z), h(z, w)) < 0$ при любых z из $\|z\| \geq k_1$, $w \in W$. Тогда уравнение (1) E -диссипативно.

Примечание. Символ $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение векторов: если $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in R^n$, то $(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Следствие. Если $h(z, w)$ в (1) имеет вид $h(z, w) = h_1(z) + h_2(z, w)$ и для уравнения $\dot{z} = h_1(z)$ при $\|z\| \geq k_2 > 0$ определена непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $v(z)$, удовлетворяющая условиям: $v(z) > 0$; $v(z) \rightarrow +\infty$ при $\|z\| \rightarrow +\infty$; $(\text{grad } v(z), h_1(z)) < 0$, то для E -диссипативности уравнения (1) достаточно выполнения неравенства $(\text{grad } v(z), h_2(z, w)) < -(\text{grad } v(z), h_1(z))$ при $\|z\| \geq k_3 \geq k_2$, $w \in W$.

Это следствие представляет интерес по следующей причине: вопросам наличия у уравнения $\dot{z} = h_1(z)$ функций $v(z)$, удовлетворяющих сформулированным выше условиям, посвящена обширная литература по теории устойчивости и теории колебаний (см., например, ⁽²⁻⁴⁾).

Теорема 2. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$\dot{z} = Az + l(z, w), \quad (6)$$

где $\|l(z, w)\| \leq k_4 \|rz\| + k_5$ при $\|z\| \leq k_6$, и при $t \leq 0$ $\|re^{tA}\| \leq k_7 e^{-\alpha t}$, где $\alpha > 0$ и матричная норма согласована с нормой R^n . Если $k_4 k_7 < \alpha$, то уравнение (6) r -диссипативно и при $t \geq t_s(z_0) \geq 0$

$$\|rz(t)\| \leq \frac{k_4 k_7 k_8}{\alpha - k_4 k_7} + \varepsilon,$$

где $k_8 = \max \{k_5, \max_{\|z\| \leq k_6, w \in W} \|k_4 \|rz\| - \|l(z, w)\|\}$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малая константа.

Теорема доказывается с помощью леммы Гронуолла.

3. Пусть в k -мерном нормированном пространстве R^k движется объект

$$\dot{x} = f(x) + u, \quad x(0) = x_0, \quad (7)$$

где $u = u(t)$ — k -мерная измеримая вектор-функция, удовлетворяющая ограничению $u(t) \in P$ — компакт из R^k , $f(x)$ — непрерывная на R^k вектор-функция. Пусть в l -мерном нормированном пространстве R^l движется объект

$$\dot{y} = g(y, v), \quad y(0) = y_0, \quad (8)$$

где $v = v(t)$ — q -мерная измеримая вектор-функция, удовлетворяющая ограничению $v(t) \in Q$ — компакт из нормированного R^q , $g(y, v)$ — непрерывная на $R^l \times Q$ вектор-функция. Предполагается, что при произвольных допустимых $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, решения уравнений (7), (8) продолжимы на $[0, +\infty)$. Объект x — догоняющий, объект y — убегающий. Преследование считается законченным при $t_1 \geq 0$, когда первую $(x(t_1); y(t_1)) \in M$ — множеству из $R^k \times R^l$. Задача преследования рассматривается с точки зрения преследователя при обычных предположениях относительно его информированности (см. ^(1, 5-8)).

Важной проблемой является выделение начальных состояний x_0, y_0 , из которых догоняющий может завершить преследование при любом допустимом поведении убегающего за конечное время.

Пусть объект x идеально линеаризуем для x_0 , а объект y линеаризуем для y_0 . Тогда при $t \geq t_0 = t(x_0, y_0)$ вместо уравнений (7), (8), как это следует из выше сказанного, можно рассмотреть уравнения

$$\dot{x} = A_1 x + \omega_1, \quad \omega_1 \in \Omega, \quad x(t_0) = x(t_0), \quad (9)$$

$$\dot{y} = A_2 y + \omega_2, \quad \omega_2 \in S, \quad y(t_0) = y(t_0). \quad (10)$$

Для решения поставленной проблемы для линейной игры (9), (10) имеется несколько эффективных методов (см. (1, 6-8)), и они могут помочь в решении проблемы в нелинейной игре (7), (8). Отметим, что матрицы A_1 , A_2 и множества Ω , S определяются, вообще говоря, неоднозначным образом. Меняя матрицы A_1 , A_2 и соответственно множества Ω , S , можно попытаться удовлетворить условиям одной из теорем (см. (1, 6-8)), обеспечивающих возможность окончания преследования в линейной игре (9), (10) из начального состояния $x(t_0)$, $y(t_0)$. Заметим, что положение точки $y(t_0)$ (если $t(x_0, y_0) > 0$) неизвестно в момент $t = 0$, но точку $x(t_0)$ догоняющий может выбрать при $t = 0$ выгодным для себя образом, исходя из своих и убегающего возможностей и предполагая применить при $t \geq t_0$ линейную теорию для игры (9), (10) (дополнительно надо потребовать единственности решения уравнения (7)). В частности, если потребовать, что объект x (см. (9)) имеет возможность осуществить окончание преследования объекта y (см. (10)) из любого начального состояния $x(t_0)$, $y(t_0)$ за конечное время (зависящее от начального состояния), то в исходной игре преследования (7), (8) объект x может осуществить окончание преследования из любого начального состояния x_0 , y_0 за конечное время. Это обстоятельство используется при рассмотрении примера 4.

4. Пример 1. Движение управляемого объекта описывается уравнением $Lx = \kappa w$, где L — дифференциальный оператор,

$$L = \sum_{i=0}^m a_i \left(x, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} \right) \frac{d^i}{dt^i},$$

$a_i \left(x, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} \right)$ — непрерывные скалярные функции своих аргументов,

причем $a_m = 1$; x — k -мерный вектор из нормированного пространства R^k , $k \geq 1$; κ — положительная константа, $\|w\| \leq 1$. Предполагается,

что $a_i = \alpha_i + b_i \left(x, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} \right)$, $i = 0, \dots, m-1$, где α_i — константы, $|b_i| \leq \Delta_i$, $i = 0, \dots, m-1$, и что все корни уравнения

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \lambda^i = 0, \quad \alpha_m = 1, \quad (11)$$

имеют отрицательные действительные части.

В фазовом пространстве R^{mk} векторов $z = (z_1; z_2 \dots; z_m)$, где $z_i \in R^k$, введем некоторую норму $\|z\|$, от которой потребуем, чтобы $\|z\| \geq \max_{i=1, \dots, m} \|z_i\|$. Рассмотрим блочную $(mk \times mk)$ -матрицу

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Из предположения о корнях уравнения (11) следует, что

$$\|e^{\mathfrak{A}t}\| \leq k_0 e^{-\alpha t}, \quad (12)$$

где матричная норма согласована с нормой R^{mk} . Положим $\mu = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta_i$.

Используя теорему 2, получаем, что при $k_0 \mu < \alpha$ изучаемый объект ли-

неаризуем, а при $k_0(\mu^2 + \mu) < \alpha$ идеально линейаризуем, причем в качестве матрицы A можно взять $\mathcal{A}$.

Пример 2. Рассмотрим предыдущий пример для случая $m = 2$, $\alpha_i > 0$, $i = 0, 1$, и $1/4\alpha_1^2 - \alpha_0 > 0$. При сделанных предположениях корни λ_1 , λ_2 уравнения (11) действительны, различны и отрицательны; будем считать $\lambda_2 > \lambda_1$.

Введем в пространстве R^{2k} векторов $z = (z_1; z_2)$ норму формулой $\|z\| = \|z_1\| + \|z_2\|$. Определим норму блочной $(2k \times 2k)$ -матрицы $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ следующим образом: $\|C\| = \max(|c_{11}| + |c_{21}|; |c_{12}| + |c_{22}|)$, очевидно она согласована с нормой R^{2k} . Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае в (12) можно положить

$$k_9 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \max\{|\lambda_1| + \lambda_1\lambda_2; 1 + \lambda_2 - \lambda_1\}, \quad \alpha = |\lambda_2|.$$

Полагая $\mu = \max_{i=0,1} \Delta_i$, используя теорему 2, можно утверждать, что при $k_9\mu < \alpha$ объект x линейаризуем, а при $k_0(\mu^2 + \mu) < \alpha$ идеально линейаризуем.

Пример 3. Движение управляемого объекта описывается уравнением: $\ddot{x} + a_1(x, \dot{x})\dot{x} + a_0(x)x = \kappa w$, где a_i , $i = 0, 1$, — непрерывные скалярные функции, x — k -мерный вектор из нормированного пространства R^k , $k \geq 1$, κ — положительная константа, $\|w\| \leq 1$. Предполагается, что $a_1(x, \dot{x}) \geq \alpha_1$, $a_0(x) \geq \alpha_0$, где α_1 , α_0 — положительные константы, что существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $G(x)$, что $\text{grad } G(x) = a_0(x)x$ и что $G(x) \rightarrow +\infty$ при $\|x\| \rightarrow +\infty$. Обозначим через $h(z, w)$ $2k$ -мерный вектор $(z_2; -a_1(z_1, z_2)z_2 - a_0(z_1)z_1 + \kappa w)$. Потребуем, чтобы при $\|z\| \geq k_{10} > 0$ $|(\text{grad } a_1(z_1, z_2), h(z, w))| \leq \gamma$, где константа $\gamma < \min\{\alpha_0, 2\alpha_1(-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_0})\}$. При сформулированных предположениях рассматриваемое уравнение E -диссипативно.

Пример 4. Объект x , описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \alpha(x, \dot{x})\dot{x} = \rho u, \quad (13)$$

где x — k -мерный вектор из нормированного пространства R^k , $k \geq 1$, $\alpha(x, \dot{x})$ — непрерывная скалярная функция, ρ — положительная константа, $\|u\| \leq 1$, преследует объект

$$\ddot{y} + \beta(y, \dot{y})\dot{y} = \sigma v, \quad (14)$$

где $y \in R^k$, $\beta(y, \dot{y})$ — непрерывная скалярная функция, σ — положительная константа, $\|v\| \leq 1$. Преследование считается законченным, когда впервые $x(t_1) = y(t_1)$. Поставленная задача является нелинейным аналогом контрольного примера (см. (5)).

Будем предполагать выполненными неравенства

$$\alpha_1 \geq \alpha(x, \dot{x}) \geq \alpha_0, \quad \beta_1 \geq \beta(y, \dot{y}) \geq \beta_0, \\ \rho \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha_0}\right) > \sigma \left(1 + \frac{\delta}{\beta_0}\right); \quad \frac{\rho}{\alpha_0} \frac{\alpha_0 - \Delta}{\alpha_0 + \Delta} > \frac{\sigma}{\beta_0},$$

где α_0 , α_1 , β_0 , β_1 — положительные константы, $\Delta = 1/2(\alpha_1 - \alpha_0)$, $\delta = 1/2(\beta_1 - \beta_0)$. Используя идеальную линейаризуемость объекта (13) и линейаризуемость объекта (14), можно показать, привлекая известные результаты Л. С. Понтрягина (см. (5)), что в рассматриваемой задаче преследование можно завершить за конечное время из любого начального состояния.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Понтрягин, ДАН, 174, № 6 (1967). ² Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, 1959. ³ В. А. Плисс, Нелокальные проблемы теории колебаний, «Наука», 1964. ⁴ Б. П. Демидович, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 2, Киев, 1963. ⁵ Л. С. Понтрягин, УМН, 21, № 4 (1966). ⁶ Л. С. Понтрягин, ДАН, 175, № 4 (1967). ⁷ Н. Н. Красовский, Игровые задачи о встрече движений, «Наука», 1970. ⁸ Б. Н. Пшеничный, Автоматика и телемеханика, № 1 (1968).