

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. Г. СУШКО

**ОБ АСИМПТОТИКЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ОДНОГО
КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 30 XII 1971)

1. В полосе $D\{0 \leq t \leq T, -\infty < x < \infty\}$ рассматривается задача Коши

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi(t, x, u_\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \psi(t, x, u_\varepsilon) = 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \\ \varphi_{vv}''(t, x, v) \geq a_0 > 0, \quad (1)$$

$$u_\varepsilon|_{t=0} = f_\varepsilon(x). \quad (2)$$

Функции $\varphi(t, x, v)$, $\psi(t, x, v)$ предполагаются достаточно гладкими при всех $(t, x) \in D$ и ограниченных v ; $f_\varepsilon(x)$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция, обладающая кусочно-непрерывными производными достаточно высокого порядка.

Наряду с задачей (1), (2) рассматривается задача Коши

$$L_0 u_0 \equiv \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, u_0)}{\partial x} + \psi(t, x, u_0) = 0, \quad (3)$$

$$u_0|_{t=0} = f_0(x), \quad (4)$$

где относительно $f_0(x)$ делаются те же предположения, что и относительно $f_\varepsilon(x)$.

Вопрос о сходимости решений уравнения (1) к решениям уравнения (3) рассматривался в работах (1-4) и других.

В работе (5) показано, что если решение задачи (3), (4) имеет в полосе D изолированную линию разрыва, вне точек которой $u_0(t, x)$ обладает достаточным числом непрерывных производных, и $f_\varepsilon(x) \equiv f_0(x)$, то всюду вне некоторой фиксированной окрестности линии разрыва

$$|u_\varepsilon - u_0| + |(u_\varepsilon - u_0)_t| + |(u_\varepsilon - u_0)_x| + |(u_\varepsilon - u_0)_{xx}| \leq K\varepsilon,$$

где постоянная K не зависит от ε .

В работе (6) при аналогичных предположениях относительно функции $u_0(t, x)$ построены нулевое и первое приближения асимптотики решения задачи (1), (2) по целым степеням малого параметра для случая, когда $f_\varepsilon(x) = A_\varepsilon f_0(x)$, где A_ε — некоторый специально подобранный оператор сглаживания, примененный к разрывной функции $f_0(x)$.

Для проведения равномерных оценок погрешности асимптотики решений задачи (1), (2) необходимо иметь априорные оценки для производных функций $u_\varepsilon(t, x)$. Справедливо следующее

Утверждение. Если начальная функция $f_\varepsilon(x)$ обладает непрерывными ограниченными производными первого и второго порядков, $|f_\varepsilon'(x)| \leq K\varepsilon^{-1}$, $|f_\varepsilon''(x)| \leq K\varepsilon^{-2}$, то всюду в полосе D справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^p u_\varepsilon(t, x)}{\partial t^s \partial x^r} \right| \leq K\varepsilon^{-p}, \quad (5)$$

где $p \leq 2$, $s \leq 1$. Если же в некоторых точках $\bar{x}$ прямой $t = 0$ дифференцируемость функции $f_\varepsilon(x)$ нарушается, то при всех $(t, x) \in D \setminus \{(t, x):$

$|x - \bar{x}| + t \leq \rho\}$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial u_\epsilon(t, x)}{\partial x} \right| \leq K \epsilon^{-1/4} \rho^{-1}.$$

Замечание. Для случая $p = r = 1$ оценка (5) приведена в работе (2), однако при ее доказательстве в указанной работе допущена неточность. Полное доказательство этого утверждения можно найти в работе (7).

В настоящей работе мы опишем асимптотику решений задачи (1), (2) и приведем оценки погрешностей при различных предположениях относительно свойств решений задачи (3), (4).

2. Условие А. Функция $f_0(x)$ такова, что решение задачи (3), (4) имеет в полосе D единственную достаточно гладкую линию разрыва $x = x_0(t)$, $0 \leq t \leq T$; всюду вне линии разрыва функция $u_0(t, x)$ непрерывна и обладает непрерывными ограниченными производными достаточно высокого порядка, причем предельные значения функции $u_0(t, x)$ и всех ее производных непрерывны на линии разрыва.

Без ограничения общности можно считать, что $x_0(t) = 0$ при всех $t \in [0, T]$; для простоты изложения будем также всюду в дальнейшем предполагать, что $\varphi(t, x, v) \equiv \varphi(v)$, $\psi(t, x, v) \equiv 0$.

Пусть для функции $f_0(x)$ выполняется условие А, а функция $f_\epsilon(x)$ может быть представлена в виде

$$f_\epsilon(x) = f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \dots + \epsilon^s f_s(x) + \epsilon^{s+1} \bar{f}(x, \epsilon), \quad (6)$$

где $f_h(x)$, $\bar{f}(x, \epsilon)$ — непрерывные при всех $x \neq 0$ функции, обладающие непрерывными производными достаточно высокого порядка (в частности, возможен случай $f_\epsilon(x) \equiv f_0(x)$). При этих условиях асимптотика $u_\epsilon^{(s)}(t, x)$ решения задачи (1), (2) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} u_\epsilon^{(s)}(t, x) &= u_{(s)}(t, x) + \tilde{u}_{(s+1)}(t, x) = \\ &= [u_0(t, x) + \epsilon u_1(t, x) + \dots + \epsilon^s u_s(t, x)] + \\ &+ [\tilde{u}_0(t, x/\epsilon) + \epsilon \tilde{u}_1(t, x/\epsilon) + \dots + \epsilon^{s+1} \tilde{u}_{s+1}(t, x/\epsilon)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Функции $u_k(t, x)$, $k = 1, 2, \dots, s$, находятся как решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициенты которых не меняются при изменении номера k и не зависят от ϵ ; при $t = 0$ функции $u_k(t, x)$ удовлетворяют условию $u_k(0, x) = f_k(x)$. Функции $\tilde{u}_k(t, x/\epsilon)$, $k \geq 0$, находятся как решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по переменной $\xi = x/\epsilon$, линейных при $k \geq 1$; коэффициенты этих уравнений также не меняются при изменении номера k . Всяду в полосе D функции $\tilde{u}_k(t, \xi)$ полностью определяются по указанному разложению функции $f_\epsilon(x)$. При этом значения $\tilde{u}_k(t, 0)$ могут быть выбраны таким образом, что функции $u_\epsilon^{(k)}(t, x)$, $k = 0, 1, \dots, s$, будут обладать следующими свойствами:

1) $u_\epsilon^{(k)}(t, x)$ непрерывны всюду в полосе D вместе с производными первого порядка, имеют при $x \neq 0$ непрерывные производные до третьего порядка включительно, причем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^p u_{(k)}(t, x)}{\partial t^q \partial x^r} \right| &\leq K, \quad \left| \frac{\partial^p \tilde{u}_{(k)}(t, \frac{x}{\epsilon})}{\partial t^q \partial x^r} \right| \leq K \epsilon^{-r} \exp\left(-\frac{m|x|}{\epsilon}\right), \\ -K \epsilon^{-1} \exp\left(-\frac{m|x|}{\epsilon}\right) &\leq \frac{\partial \tilde{u}_{(k)}(t, \frac{x}{\epsilon})}{\partial x} \leq K \exp\left(-\frac{m|x|}{\epsilon}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $p \leq 3$, $q \leq 1$, $m > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от ϵ ;

2) $L_\epsilon u_\epsilon^{(k)}(t, x) = F_k(t, x)$ при $x \neq 0$,

$$|F_k(t, x)| \leq \epsilon^k K, \quad \int_a^b |F_k(t, x)| dx \leq \epsilon^{k+1} K,$$

где a, b — произвольные ограниченные постоянные;

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{(k)}(0, x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s+1.$$

Свойство 1) означает, в частности, что функции $\tilde{u}_k(t, x/\varepsilon)$ имеют характер пограничного слоя, т. е. являются функциями, заметно отличными от нуля лишь вблизи линии разрыва решения задачи (3), (4).

Теорема 1. Пусть функция $f_0(x)$ удовлетворяет условию А, а $f_\varepsilon(x)$ может быть представлена в виде (6), где функции $f_k(x)$, $\bar{f}(x, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots, s$, обладают указанными выше свойствами. В этом случае при всех $|x| \geq K\varepsilon^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1/6$, справедлива оценка

$$|u_\varepsilon - u_{(s)}| + |(u_\varepsilon - u_{(s)})_t| + |(u_\varepsilon - u_{(s)})_x| + |(u_\varepsilon - u_{(s)})_{xx}| \leq \varepsilon^{s+1} K, \quad (9)$$

где постоянная K не зависит от ε .

Из неравенства (9) следует, что асимптотика $u_\varepsilon^{(s)}(t, x)$ решения задачи (1), (2) всюду вне окрестности $|x| \leq K\varepsilon^\alpha$ линии разрыва отличается от точного решения исходной задачи не более чем величиной порядка $O(\varepsilon^{s+1})$. Поэтому дальнейшие оценки достаточно проводить лишь в прямоугольнике $Q_0 \{ |x| \leq 1, 0 \leq t \leq T \}$.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то в прямоугольнике Q_0 равномерно для всех $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$\left| \int_a^b [u_\varepsilon(t, x) - u_0(t, x)] dx \right| \leq \varepsilon K, \quad (10)$$

где $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, а постоянная K не зависит от ε .

Лемма 1. Существуют не зависящие от ε положительные постоянные m_1 и r такие, что $\varphi_\varepsilon \cdot \operatorname{sgn} x < -m_1$ при $m^{-1}\varepsilon \ln \varepsilon^{-1} \leq |x| \leq r$, $\varphi_\varepsilon \operatorname{sgn}(x - \varepsilon \bar{x}(t)) \leq K\varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$ при $|x| \leq m^{-1}\varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$ (здесь константа m та же, что и в оценке (8) для функций типа пограничного слоя).

Используя утверждения теоремы 2 и леммы 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, то всюду в полосе D справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon^{(s)}(t, x)| \leq \varepsilon^{s+1} K + V(t, x, \varepsilon), \quad (11)$$

где $V(t, x, \varepsilon) = K \exp \left[-\frac{t}{\varepsilon^\nu} - \frac{(x - \varepsilon \bar{x}(t))^2}{\varepsilon^{1+\nu}} \right]$, а постоянные K, ν не зависят от ε , $0 < \nu < 1$.

Из оценки (11), в частности, следует, что в полосе D всюду вне достаточно малой окрестности начала координат справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon^{(s)}(t, x)| \leq \varepsilon^{s+1} K.$$

3. Рассмотрим теперь случай, когда начальная функция $f_0(x)$ непрерывна и достаточное число раз дифференцируема при всех $x \in (-\infty, \infty)$, а решение задачи (3), (4) непрерывно при всех $0 \leq t \leq t_0$, $t_0 > 0$, и разрывно при $t > t_0$.

Условие Б. Начальная функция $f_0(x)$ такова, что решение задачи (3), (4) имеет в полосе D единственную достаточно гладкую линию разрыва $x = x_1(t)$, $0 < t_0 < t \leq T$; всюду вне точек линии разрыва функция $u_0(t, x)$ ограничена, непрерывна и обладает непрерывными ограниченными производными достаточно высокого порядка; предельные значения функции $u_0(t, x)$ и всех ее производных на линии разрыва непрерывны при $t > t_0$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1(t) = 0$ при всех $t > t_0$.

Если $f_0(x)$ удовлетворяет условию Б, а функция $f_\varepsilon(x)$ представляется в виде (6), где $f_k(t, x)$, $\bar{f}(x, \varepsilon)$ — непрерывные ограниченные функции,

обладающие непрерывными ограниченными производными достаточно высокого порядка (некоторые из этих функций могут быть тождественно равными нулю), то в этом случае мы также можем построить функции $u_k(t, x)$, $\tilde{u}_k(t, x/\varepsilon)$, входящие в разложение (7), при всех $t \neq t_0$. При этом для всех $t \geq t_1 > t_0$, где $t_1 - t_0$ не зависит от ε , с помощью оценки (9) и условий

$$\left| \int_{-1}^1 [u_\varepsilon(t_1, x) - u_\varepsilon^{(k)}(t_1, x)] dx \right| \leq K\varepsilon^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2s+1,$$

функции типа пограничного в пределах указанной точности определяются однозначно.

Теорема 4. Пусть функция $f_0(x)$ удовлетворяет условию Б, а $f_\varepsilon(x)$ может быть представлена в виде (6), где $f_k(x)$, $\bar{f}(x, \varepsilon)$ — непрерывные ограниченные функции, обладающие непрерывными ограниченными производными достаточно высокого порядка.

Тогда всюду вне некоторой фиксированной окрестности точки «зарождения разрыва» $(t_0, 0)$

$$|u_\varepsilon(t, x) - u_\varepsilon^{(s)}(t, x)| \leq \varepsilon^{s+1} K,$$

где постоянная K не зависит от ε .

Таким образом, если $f_\varepsilon(x)$ представляется в виде (6), а функция $f_0(x)$ удовлетворяет условиям А или Б, то всюду в полосе D , за исключением достаточно малых окрестностей точек этой полосы, в которых производные решений задач (1), (2) или (3), (4) не ограничены, мы можем построить асимптотику (7) решения задачи (1), (2), обладающую указанными выше свойствами. Аналогичные утверждения нетрудно сформулировать и для того случая, когда в полосе D имеется несколько достаточно гладких (вообще говоря, пересекающихся) линий разрыва решения задачи (3), (4).

4. Предположим, что структура решения задачи (3), (4) нам известна лишь вне некоторого прямоугольника $Q_{t_2} \{t_2 < t < T, a < x < b\}$, $t_2 \geq 0$.

Пусть всюду вне Q_{t_2} мы можем построить некоторую асимптотику $\bar{u}^{(s)}(t, x, \varepsilon)$ решения задачи (1), (2), имеющую вне Q_{t_2} погрешность $O(\varepsilon^{s+1})$. Пусть функция $v_\varepsilon^{(s)}(t, x)$ определяется в полосе D так:

а) $v_\varepsilon^{(s)}(t, x) \equiv \bar{u}^{(s)}(t, x, \varepsilon)$ при $(t, x) \notin Q_{t_2}$;

б) во внутренних точках прямоугольника Q_{t_2} функция $v_\varepsilon^{(s)}(t, x)$ непрерывна, обладает непрерывными производными первого порядка по t и до второго порядка по x и удовлетворяет уравнению (1);

с) $v_\varepsilon^{(s)}(t, a) = \bar{u}^{(s)}(t, a, \varepsilon)$; $v_\varepsilon^{(s)}(t, b) = \bar{u}^{(s)}(t, b, \varepsilon)$; $v_\varepsilon^{(s)}(t_2, x) = \bar{u}^{(s)}(t_2, x, \varepsilon)$.

При указанных предположениях можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Для функции $v_\varepsilon^{(s)}(t, x)$, обладающей свойствами а), б), с), всюду в полосе D справедлива оценка

$$|v_\varepsilon^{(s)}(t, x) - u_\varepsilon(t, x)| \leq K\varepsilon^{s+1}.$$

Справедливость теоремы 5 позволяет сочетать различные способы построения асимптотических представлений решения задачи (1), (2) в зависимости от структуры решения задачи (3), (4).

Автор выражает искреннюю признательность Л. А. Чудову за постоянное внимание к настоящей работе и полезные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ О. А. Олейник, УМН, 12, 3, 75 (1957). ² О. А. Олейник, УМН, 14, 2, 86 (1959). ³ С. Н. Круглов, УМН, 20, 6, 126 (1965). ⁴ Н. С. Бахвалов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 2 (1966). ⁵ В. Г. Сушко, Матем. заметки, 8, № 3 (1970). ⁶ В. Г. Сушко, Л. А. Чудов, Сборн. Вычислительные методы и программирование, 7, 1967. ⁷ В. Г. Сушко, Сборн. Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, в. 2, М., 1971.