Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 4

УДК 539.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С. М. ХЗАРДЖЯН

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИСЛОКАЦИЯХ В УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 7 XII 1971)

В статье ([1]) решение задачи о дислокациях в бесконечном изотропном упругом цилиндре сведено к отысканию отличных от нуля собственных значений и соответствующих собственных функций системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\nabla^2 U + \frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{2}\right) + \lambda^2 U = 0,\\
\nabla^2 V + \frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{2}\right) + \lambda^2 V = 0, \qquad (1)\\
-\frac{1}{2(1-\nu)}\nabla^2\left[2\nu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) - (1-2\nu)W\right] + \lambda^2\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + W\right) = 0
\end{gathered}
$$

в Σ с краевыми условиями, которые могут быть записаны в виде

$$
\begin{gathered}
\left(2\frac{\partial U}{\partial x} + 2\nu\frac{\partial V}{\partial y} + \nu W\right)\cos(n, x) + (1-\nu)\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(n, y) = 0,\\
(1-\nu)\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(n, x) + \left(2\nu\frac{\partial U}{\partial x} + 2\frac{\partial V}{\partial y} + \nu W\right)\cos(n, y) = 0, \qquad (2)\\
\frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu)W - 2\nu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\right]\cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-2\nu)W - \right.\right.\\
\left.\left. - 2\nu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\right]\cos(n, y)\right\} + \lambda^2[U\cos(n, x) + V\cos(n, y)] = 0
\end{gathered}
$$

на L (L — контур поперечного сечения стержня, Σ — область, ограниченная этим контуром, ν — коэффициент Пуассона). Ниже мы указываем эффективный метод решения этой краевой задачи.

Полагая в (1) и (2)

$$
W = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Phi + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \qquad (3)
$$

и решая краевую задачу для функций U, V, Φ итерационным методом, получим для расчета последовательных приближений $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, краевую задачу для функции $\Phi^{(k+1)}$

$$
\begin{gathered}
\nabla^2\Phi^{(k+1)} + \frac{1}{1-2\nu}\left[\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial y} + 2(1-\nu)\Phi^{(k)}\right] = 0 \ \text{в}\ \Sigma, \qquad (4)\\
\partial\Phi^{(k+1)}/\partial n + U^{(k)}\cos(n, x) + V^{(k)}\cos(n, y) = 0 \quad \text{на} \quad L
\end{gathered}
$$

и краевую задачу для функций $U^{(k+1)}$, $V^{(k+1)}$

$$
\begin{gathered}
\nabla^2 U^{(k+1)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U^{(k+1)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(k+1)}}{\partial y} + \Phi^{(k+1)}\right) + U^{(k)} = 0,\\
\nabla^2 V^{(k+1)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U^{(k+1)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(k+1)}}{\partial y} + \Phi^{(k+1)}\right) + V^{(k)} = 0 \ \text{в}\ \Sigma,\\
2\left[(1-\nu)\frac{\partial U^{(k+1)}}{\partial x} + \nu\frac{\partial V^{(k+1)}}{\partial y} + \nu\Phi^{(k+1)}\right]\cos(n, x) +\\
+ (1-2\nu)\left(\frac{\partial U^{(k+1)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(k+1)}}{\partial x}\right)\cos(n, y) = 0, \qquad (5)
\end{gathered}
$$

$$(1-2\nu)\left(\frac{\partial U^{(k+1)}}{\partial y}+\frac{\partial V^{(k+1)}}{\partial x}\right)\cos(n, x)+$$
$$+2\left[\nu\frac{\partial U^{(k+1)}}{\partial x}+(1-\nu)\frac{\partial U^{(k+1)}}{\partial y}+\nu\Phi^{(k+1)}\right]\cos(n, y)=0 \text{ на } L.$$

Будем предполагать ниже, что оси x, y совмещены с главными центральными осями инерции сечения стержня плоскостью $z=0$. Общее решение краевых задач, определяющих функции $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, может быть представлено в виде

$$U^{(k)}=U^{(k)*}-\nu A_k x+B_k+D_k y, \qquad V^{(k)}=V^{(k)*}-\nu A_k y+C_k-D_k x,$$
$$\Phi^{(k)}=\Phi^{(k)*}+A_k, \tag{6}$$

где $U^{(k)*}$, $V^{(k)*}$, $\Phi^{(k)*}$ — частное решение этих краевых задач, A_k, B_k, C_k, D_k — произвольные постоянные.

Подставляя $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$ из (6) в (4) и определяя A_k из условия разрешимости этой краевой задачи, получим

$$A_k=-\frac{1}{(1-\nu-2\nu^2)S}\iint_\Sigma\left[\nu\left(\frac{\partial U^{(k)*}}{\partial x}+\frac{\partial V^{(k)*}}{\partial y}\right)+(1-\nu)\Phi^{(k)*}\right]dS, \tag{7}$$

где S — площадь сечения Σ.

Решение краевой задачи (4) можно представить в виде

$$\Phi^{(k+1)}=Z^{(k+1)}-B_k x-C_k y-D_k\theta, \tag{8}$$

где $\theta(x, y)$ — функция кручения для рассматриваемого стержня, а $Z^{(k+1)}$ — решение краевой задачи

$$\nabla^2 Z^{(k+1)}+\frac{1}{1-2\nu}\left[\frac{2U^{(k)*}}{\partial x}+\frac{\partial V^{(k)*}}{\partial y}+2(1-\nu)\Phi^{(k)*}\right]+2A_k=0 \text{ в } \Sigma,$$
$$\frac{\partial Z^{(k+1)}}{\partial n}+(U^{(k)*}-\nu A_k x)\cos(n, x)+(V^{(k)*}-\nu A_k y)\cos(n, y)=0 \text{ на } L, \tag{9}$$

Пусть $Z^{(k+1)*}$ — частное решение этой краевой задачи, а $\Phi^{(k+1)*}$ — соответствующее частное решение краевой задачи (4). Подставляя $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $\Phi^{(k+1)*}$ из (6) и (8) в (5), получим для функций $U^{(k+1)}$, $V^{(k+1)}$ краевую задачу, для разрешимости которой должны выполняться три условия. Одно из этих условий приводит к уравнению

$$D_k\iint_\Sigma\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\theta}{\partial y}-y\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)dS+$$
$$+\iint_\Sigma\left(yU^{(k)*}-xV^{(k)*}+y\frac{\partial Z^{(k+1)*}}{\partial x}-x\frac{\partial Z^{(k+1)*}}{\partial y}\right)dS=0, \tag{10}$$

определяющему постоянную D_k, два остальных условия выполняются при этом автоматически. Уравнение (10) всегда разрешимо, так как коэффициент при D_k равен отношению жесткости кручения к модулю сдвига.

Решение краевой задачи (5) можно представить в виде

$$U^{(k+1)}=X^{(k+1)}+\frac{\nu}{2}B_k(x^2-y^2)+\nu C_k xy,$$
$$V^{(k+1)}=Y^{(k+1)}+\nu B_k xy+\frac{\nu}{2}C_k(y^2-x^2), \tag{11}$$

где $X^{(k+1)}$, $Y^{(k+1)}$ — решение краевой задачи

$$\nabla^2 X^{(k+1)}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x}+\frac{\partial Y^{(k+1)}}{\partial y}\right)+U^{(k)*}-\nu A_k x+D_k y+$$
$$+\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial Z^{(k+1)*}}{\partial x}-D_k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=0,$$

$$\nabla^2 Y^{(k+1)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x} + \frac{\partial Y^{(k+1)}}{\partial y}\right) + V^{(k)*} - \nu A_k y - D_k x +$$

$$+ \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial Z^{(k+1)*}}{\partial y} - D_k \frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = 0 \text{ в } \Sigma, \tag{12}$$

$$2\left[(1-\nu)\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x} + \nu\frac{\partial Y^{(k+1)}}{\partial y}\right]\cos(n, x) + (1-2\nu)\left(\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial y} +\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial Y^{(k+1)}}{\partial x}\right)\cos(n, y) + 2\nu\left(Z^{(k+1)*} - D_k\theta\right)\cos(n, x) = 0,$$

$$(1-2\nu)\left(\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial y} + \frac{\partial Y^{(k+1)}}{\partial x}\right)\cos(n, x) + 2\left[\nu\frac{\partial X^{(k+1)}}{\partial x} +\right.$$

$$\left.+ (1-\nu)\frac{\partial Y^{(k+1)}}{\partial y}\right]\cos(n, y) + 2\nu\left(Z^{(k+1)*} - D_k\theta\right)\cos(n, y) = 0 \text{ на } L.$$

Согласно (4), (5) и (6), должны иметь место зависимости

$$\iint_\Sigma x\left[\nu\left(\frac{\partial U^{(k)*}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(k)*}}{\partial y}\right) + (1-\nu)\Phi^{(k)*}\right]dS = 0,$$

$$\iint_\Sigma g\left[\nu\left(\frac{\partial U^{(k)*}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(k)*}}{\partial y}\right) + (1-\nu)\Phi^{(k)*}\right]dS = 0. \tag{13}$$

Пусть $X^{(k+1)*}$, $Y^{(k+1)*}$ — частное решение краевой задачи (12), а $U^{(k+1)*}$, $V^{(k+1)*}$ — соответствующее частное решение краевой задачи (5). Заменяя в (13) k на $k+1$ и подставляя в найденные неравенства $U^{(k+1)*}$, $V^{(k+1)*}$, $\Phi^{(k+1)*}$ из (8) и (11), получим для постоянных B_k и C_k формулы

$$B_k = \frac{1}{(1-\nu-2\nu^2)\,I_y}\iint_\Sigma x\left[\nu\left(\frac{\partial X^{(k+1)*}}{\partial x} + \frac{\partial Y^{(k+1)*}}{\partial y}\right) + (1-\nu)\left(Z^{(k+1)*} - D_k\theta\right)\right]dS,$$

$$C_k = \frac{1}{(1-\nu-2\nu^2)\,I_x}\iint_\Sigma y\left[\nu\left(\frac{\partial X^{(k+1)*}}{\partial x} + \frac{\partial Y^{(k+1)*}}{\partial y}\right) + (1-\nu)\left(Z^{(k+1)*} - D_k\theta\right)\right]dS, \tag{14}$$

где I_x, I_y — моменты инерции сечения Σ.

Указанная выше расчетная схема однозначно определяет последовательные приближения $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, по начальным функциям $U^{(1)*}$, $V^{(1)*}$, $\Phi^{(1)*}$.

Заметим далее, что если λ^2 — собственное значение рассматриваемой краевой задачи и U, V, Φ — соответствующие собственные функции, то число $\overline{\lambda}^2$ также является собственным значением этой краевой задачи и ему соответствуют собственные функции $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{\Phi}$. Будем обозначать через λ_j^2, $\overline{\lambda_j^2}$, $j = 1, 2, \ldots$, отличные от нуля собственные значения рассматриваемой краевой задачи и через U_j, V_j, Φ_j, $\overline{U}_j$ $\overline{V}_j$, $\overline{\Phi}_j$, $j = 1, 2, \ldots$,— соответствующие собственные функции, условившись нумеровать числа λ_j^2 в порядке возрастания их модуля:

$$|\lambda_j^2| < |\lambda_2^2| < \ldots \tag{15}$$

Исходя из указанного выше алгоритма построения функций $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, можно установить разложения

$$U^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{c_j U_j}{\lambda_j^{2k-2}} + \frac{\overline{c}_j\overline{U}_j}{\overline{\lambda}_j^{2k-2}}\right), \quad V^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{c_j V_j}{\lambda_j^{2k-2}} + \frac{\overline{c}_j\overline{V}_j}{\overline{\lambda}_j^{2k-2}}\right),$$

$$\Phi^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{c_j \Phi_j}{\lambda_j^{2k-2}} + \frac{\overline{c}_j\overline{\Phi}_j}{\overline{\lambda}_j^{2k-2}}\right), \tag{16}$$

не содержащие собственных функций, соответствующих нулевому собст венному значению (c_j, $j = 1, 2, \ldots$,— коэффициенты, зависящие от вы бора начальных функций $U^{(1)*}$, $V^{(1)*}$, $\Phi^{(1)*}$).

Введем обозначения:

$$\lambda_j^2 = r_j \exp(i\varphi_j), \quad c_jU_j = R_j^{(1)} \exp(i\theta_j^{(1)}), \quad c_jV_j = R_j^{(2)} \exp(i\theta_j^2),$$
$$c_j\Phi_j = R_j^{(3)} \exp(i\theta_j^{(3)}). \tag{17}$$

Полагая для краткости $U^{(k)} = U_1^{(k)}$, $V^{(k)} = U_2^{(k)}$, $\Phi^{(k)} = U_3^{(k)}$, получим из (15) и (16) предельные равенства

$$r_1 = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{U_l^{(k)}U_l^{(k+2)} - U_l^{(k+1)2}}{U_l^{(k+1)}U_l^{(k+3)} - U_l^{(k+2)2}}}, \quad \varphi_1 = \lim_{k\to\infty} \arccos \frac{1}{2}\left(\frac{U_l^{(k)}}{r_1U_l^{(l+1)}} + \frac{r_1U_l^{(k+2)}}{U_l^{(k+1)}}\right)$$
$$\tag{18}$$
$$\theta_1^{(l)} = \lim_{k\to\infty} \left[k\varphi_1 + \operatorname{arctg}\left(\frac{r_1}{\sin\varphi_1}\,\frac{U_l^{(k+1)}}{U_l^{(k)}} - \operatorname{ctg}\varphi_1\right)\right],$$
$$R_1^{(l)} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} \frac{r_1^{(k)}U_l^{(k)}}{\cos(\theta_1^{(l)} - k\varphi_1)},$$
$$l = 1, 2, 3.$$

Переходя при расчете последовательных приближений $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $k = 2, 3\ldots$, от взятых ранее начальных приближений $U^{(1)}$, $V^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$ к начальным приближениям $U^{(1)} - c_1U_1 - \bar{c}_1\bar{U}_1$, $V^{(1)} - c_1V_1 - \bar{c}_1\bar{V}_1$, $\Phi^{(1)} - c_1\Phi_1 - \bar{c}_1\bar{\Phi}_1$, получим, согласно (18), вместо r_1, φ_1, $\theta_1^{(l)}$, $R_1^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$, числа r_2, φ_2 и функции $\theta_2^{(l)}$, $R_2^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$, отыскав таким образом второе собственное значение λ_2^2 и соответствующие собственные функции, и т. д.

Расчет последовательных приближений $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, сводится к последовательному решению задач Неймана для уравнений Пуассона и плоских задач теории упругости. Решения этих задач можно построить, зная аналитическую функцию $\omega(\zeta)$, отображающую единичный круг $|\zeta| < 1$ на область Σ (см. ([2])).

Зная собственные функции U_j, V_j, Φ_j, можно отыскать собственные функции W_j, $j = 1, 2, \ldots$, посредством соотношения (3).

Всесоюзный заочный машиностроительный институт
Москва

Поступило
2 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Рапопорт, С. М. Хзарджян, ДАН, 201, № 4 (1971). [2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, «Наука», 1966.