Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 4

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Н. А. ШИРОКОВ

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО УГЛОВЫХ ТОЧЕК С НЕНУЛЕВЫМИ ВНЕШНИМИ УГЛАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 I 1972)

Пусть $\overline{G}$ — замкнутое ограниченное множество точек комплексной плоскости z, содержащее не менее двух точек, дополнение которого есть односвязная область; $z = \psi(t) = \gamma t + \gamma_0 + \gamma_1 t^{-1} + \ldots$, $\gamma > 0$,— функция, регулярная в области $1 < |t| < \infty$, однолистно отображающая эту область на $G^1 = C\overline{G}$; $t = \varphi(z)$ — функция, обратная для $z = \psi(t)$; $\Gamma = \partial\overline{G}$; $\Gamma_R = \psi(\{|t| = R\})$, $R > 1$ — линия уровня G^1, $G_R{}^1 = \psi(\{|t| > R\})$, $1 < R < \infty$, $G_R = C\overline{G}_R{}^1$, $\Gamma_1 = \Gamma$; $\operatorname{dist}(E_1, E_2)$ — расстояние между произвольными множествами E_1 и E_2; $\rho_R(z) = \operatorname{dist}(\{z\}, \Gamma_R)$. Далее рассматриваем множества $\overline{G}$ такие, что $\psi(t)$ непрерывна при $1 \leqslant |t| < \infty$.

Пусть $t_j = e^{i\theta_j}$, $-\pi < \theta_j \leqslant \pi$, $j = 1, \ldots, l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$,— различные точки окружности $|t| = 1$; α_j, $0 < \alpha_j \leqslant 2$, $\alpha_j \neq 1$,— фиксированные числа, $h = {}^1/_2 \min\limits_{j \neq j'} (|\theta_j - \theta_{j'}|, {}^1/_2)$; $U_j = \{t\colon\ |t| > 1,\ \ |\arg t_j/t| < h\}$, U — дополнение $\bigcup\limits_{j=1}^{l} U_j$ до области $|t| > 1$. Будем говорить, что $\overline{G}$ имеет l и только l угловых точек $z_j = \psi(t_j)$, $j = 1, \ldots, l$, $z_j \neq z_{j'}$, $j \neq j'$, с внешними углами $\alpha_j\pi$, если существуют две постоянные c_1 и c_2, $0 < c_1 < c_2 < \infty$, такие, что

$$c_1|1 - t_j/t|^{\alpha_j - 1} \leqslant |\psi'(t)| \leqslant c_2|1 - t_j/t|^{\alpha_j - 1}, \quad t \in U_j, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{1_1}$$

$$c_1 \leqslant |\psi'(t)| \leqslant c_2, \quad t \in U, \tag{1_2}$$

$$\psi(t) = \psi(t_j) + A_j(t)(1 - t_j/t)^{\alpha_j}, \quad t \in U_j, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{1_3}$$

где $A_j(t)$ — функции, регулярные в $1 < |t| < \infty$, непрерывные в точке t_j, $A_j(t_j) \neq 0$, и выбрана та ветвь функции $(1 - t_j/t)^{\alpha_j}$, которая обращается в единицу при $t = \infty$. Используя условие (1_3), легко покажем, что в угловой точке z_j имеются к Γ односторонние касательные, один из углов между которыми (в определенном смысле внешний по отношению к $\overline{G}$) равен $\alpha_j\pi$.

Класс множеств, удовлетворяющих поставленным выше условиям, обозначим через $\Psi(c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \ldots, t_l, \alpha_l)$ и при $l = 0$ через $\Psi(c_1, c_2)$. Если $l = 0$, то при $|t| > 1$ выполняется условие (1_2), и мы говорим, что множество $\overline{G}$ не имеет угловых точек.

1°. Теорема. *Пусть $\overline{G} \in \Psi(c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \ldots, t_l, \alpha_l)$, $f(z)$ — функция, регулярная в G, имеющая в $\overline{G}$ r, $r = 0, 1, \ldots$, непрерывных производных,*

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in \overline{G} \\ |z_1 - z_2| \leqslant \delta}} |f^{(r)}(z_1) - f^{(r)}(z_2)|,$$

$$z \in \overline{G},\ |z - z_{j_0}| = \min_{1 \leqslant j \leqslant l} |z - z_j|, \quad z_0 \in \Gamma, \quad |z - z_0| \operatorname{dist}(\{z\}, \Gamma),$$

$$\rho = \rho_{1+1/n}(z_0), \quad \rho' = \rho_{1+1/n}(z_{j_0}), \quad \lambda = |z - z_0|, \quad \lambda' = |z - z_{j_0}|,$$

N — произвольное фиксированное большое число.

Тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует полином $P_n(z)$ степени не выше n такой, что

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant A_\nu \left[\frac{\rho^{r-\nu+N}}{(\rho+\lambda)^N}\,\omega(\rho) + \frac{\rho'^{r-\nu+N}}{(\rho'+\lambda')^N}\,\omega(\rho) \right], \quad \nu = 0, 1, \ldots, r, \tag{2}$$

где A_ν — постоянные, зависящие лишь от $\overline{G}$.

В случае, когда $z \in \Gamma$, правая часть (2) $\leqslant \mathrm{const} \cdot \rho^{r-\nu}\omega(\rho)$ и получается оценка

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant A_\nu \rho_{1+1/n}^{r-\nu}\,\omega(\rho_{1+1/n}(z)), \quad z \in \Gamma, \quad \nu = 0, 1, \ldots, r. \tag{3}$$

При значительно более сильных условиях на границу $\overline{G}$ оценки типа (3) ранее были получены в работах [1-6]. Оценка (3) для $f(z) \in \Psi(c_1, c_2)$ доказана автором [7] и при указанных в теореме условиях на границу доказана автором совместно с Н. А. Лебедевым.

Далее буквы A и C, иногда с индексами, всегда будут обозначать постоянные. Если на множестве E заданы две неотрицательные функции a и b такие, что $0 < A' \leqslant a / b \leqslant A < \infty$, то пишем $a \asymp b$ на E, если же $a \leqslant Ab$, $0 < A < \infty$, то пишем $a < \cdot\, b$ или $b \cdot > a$.

2°. Приближающий полином.

Пусть $R > 1$, $\theta \in (-\pi, \pi]$; положим $\zeta_{R,\theta} = \zeta_{R,\theta}(\zeta) = \psi(Re^{-i\theta}\varphi(\zeta))$, $\zeta \in G^1$, m и k — достаточно большие натуральные числа, зависящие от r, $\overline{G}$ и N,

$$J_{n,m}(\theta) = \frac{1}{\gamma_{n,m}}\left(\frac{\sin[n/m]\,\theta}{\sin\theta}\right)^m, \quad \gamma_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin[n/m]\,\theta}{\sin\theta}\right)^m d\theta, \tag{4}$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\,d\theta \int_\Gamma f(\zeta) \sum_{p=1}^{k} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^p}\,d\zeta, \quad z \in \overline{G}, \quad R = 1 + \frac{1}{n}.$$

Легко показать, что $P_n(z)$ — полином степени не выше $n - 1$. Полином $P_n(z)$ построен автором совместно с Н. А. Лебедевым и был использован при доказательстве оценки (3).

3°. Основные леммы. Для оценки отклонения $f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)$ используются приводимые ниже леммы. Леммы 1—4 доказаны автором совместно с Н. А. Лебедевым.

Лемма 1. *Пусть $z^{(1)}, z^{(2)} \in G_2 \cap \overline{G}^1$, $t^{(j)} = \varphi(z^{(j)})$, $j = 1, 2$. Если z_{j_0} ближайшая угловая точка к $z^{(2)}$ и $\alpha_{j_0} < 2$, то*

$$|z^{(2)} - z^{(1)}| \asymp |t^{(2)} - t^{(1)}|\,[\,|z^{(2)} - z_{j_0}|^{1/\alpha_{j_0}} + |t^{(2)} - t^{(1)}|\,]^{\alpha_{j_0}-1}.$$

Соответствующая оценка сверху имеет место и при $\alpha_{j_0} = 2$. Соответствующая оценка снизу для $\alpha_{j_0} = 2$ имеет место, если модуль приращения $\arg(z - z_{j_0})$ при движении точки z от $z^{(1)}$ до $z^{(2)}$ по некоторой кривой, соединяющей $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, лежащей в $\overline{G}^1$, не превосходит $2\pi - \delta$, где $\delta > 0$ фиксировано.

Следствие. *Если z_{j_0} — ближайшая угловая точка для $\zeta \in \Gamma$, то при $0 < \alpha_{j_0} \leqslant 2$ имеем оценку*

$$|\zeta_{R,\theta} - \zeta| < \cdot\,(|\theta| + R - 1)\,[\,|\zeta - z_{j_0}|^{1/\alpha_{j_0}} + (|\theta| + R - 1)\,]^{\alpha_{j_0}-1}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть $1 < R \leqslant 2$, $z \in \Gamma$.*
Тогда

$$\rho_R(z) \asymp (R - 1)\,[\,|z - z_{j_0}|^{1/\alpha_{j_0}} + (R - 1)]^{\alpha_{j_0}-1}, \quad |z - z_{j_0}| = \min_{1 \leqslant j \leqslant l} |z - z_j|$$

при $\alpha_j < 2$. Если $\alpha_{j_0} = 2$, то оценка (5) несколько усложняется.

Лемма 3. *Пусть $z^{(1)}, z^{(2)} \in \overline{G}$.*

Тогда существует простая спрямленная кривая $\Lambda(z^{(1)}, z^{(2)}) \subset G$ с концами в точках $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ такая, что $|\Lambda(z^{(1)}, z^{(2)})| < \cdot |z^{(1)} - z^{(2)}|$, где $|\Lambda|$ — длина кривой Λ.

Лемма 4. *Пусть $K(z, \delta)$ — круг $\{\zeta: |\zeta - z| \leqslant \delta\}$. Тогда*

$$\int_{\Gamma_R \cap K(z, \delta)} |\zeta - z|^s |d\zeta| < \cdot \delta^{s+1}, \quad s > -1, \quad z \in \Gamma,$$

$$\int_{\Gamma_R \setminus K(z, \delta)} |\zeta - z|^s |d\zeta| < \cdot \delta^{s+1}, \quad s < -1, \quad z \in \Gamma.$$

Лемма 5. *Пусть $0 < \alpha \leqslant 2$, λ, a, $b_x > 0$, b — корень уравнения*

$$b(a + b)^{\alpha - 1} = \lambda.$$

При фиксированном a имеем соотношения

$$b \asymp a\lambda^{1-\alpha}, \quad \lambda < \cdot a^\alpha;$$

$$b \asymp \lambda^{1/\alpha}, \quad \lambda \cdot > a^\alpha.$$

4°. Наметим ход доказательства теоремы. Разность $f^{(\nu)}(z) - P_p^{(\nu)}(z)$ представим в виде

$$f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} J_{n, m}(\theta)\, d\theta \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left[\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} - \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} K(z, \zeta, \theta) \right] d\zeta, \quad (6)$$

где

$$K(z, \zeta, \theta) = \sum_{p=1}^{k} \frac{(\zeta_{R, \theta} - \zeta)}{(\zeta_{R, \theta} - z)^p}, \quad R = 1 + \frac{1}{n}.$$

Представим $f(\zeta)$ в виде $f(\zeta) = f_r(\zeta, z) + q_r(\zeta, z)$,

$$f_r(\zeta, z) = \frac{1}{(r-1)!} \int_z^\zeta (\zeta - \tau)^{r-1} [f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(z)]\, d\tau,$$

где интегрирование производится по некоторой спрямленной кривой $\Lambda(z, \zeta)$, соединяющей точки z и ζ в $\overline{G}$ (в силу леммы 3 можно считать, что $|\Lambda(z, \zeta)| < \cdot |z - \zeta|$),

$$q_r(\zeta, z) = \sum_{\nu=0}^{r} \frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!} (\zeta - z)^\nu.$$

Далее в (6) заменяем $f(\zeta)$ на $f_r(\zeta, z) + q_r(\zeta, z)$ и в интеграле, содержащем $q_r(\zeta, z)$, заменяем контур интегрирования Γ на Γ_z. Далее, пользуясь леммами 1—5, приводим в получившихся интегралах оценки.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Дзядык, Изв. АН СССР, сер. матем., **23** (1959). [2] В. К. Дзядык, Изв. АН СССР, сер. матем., **26**, № 6 (1962). [3] В. К. Дзядык, Изв. АН СССР, сер. матем., **27**, № 5 (1963). [4] Б. К. Дзядык, Укр. матем. журн., **20**, № 5 (1968). [5] В. К. Дзядык, А. И. Швай, Докл. АН УССР, сер. А, **11**, 1012 (1967). [6] Н. Н. Воробьев, Укр. матем. журн., **20**, № 1 (1968). [7] Н. А. Широков, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **22**, Л., 1971, стр. 209.