

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_11

EDN: AXVKJG

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ

Д.А. Будникова

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

NATURAL FREQUENCIES OF VIBRATION OF A FIVE-LAYER ROD

D.A. Budnikova

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Рассмотрена задача о собственных колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня с двумя заполнителями. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них приняты гипотезы Бернулли о поперечных сечениях плоских и перпендикулярных деформированной осевой линии, после приложения нагрузки. В относительно толстых легких заполнителях выполняется гипотеза Тимошенко, согласно которой сечение остается плоским и несжимаемым, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Дифференциальные уравнения колебаний получены вариационным методом с учетом поперечных сил инерции. Выведено трансцендентное уравнение для собственных чисел стержня с жестко заделанными торцами, получены его численные решения. Исследована зависимость собственных частот колебаний от толщины внешних несущих слоев при различных материалах слоев стержня.

Ключевые слова: симметричный пятислойный стержень, два заполнителя, собственные числа, частоты колебаний, численные результаты.

Для цитирования: Будникова, Д.А. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д.А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_11. – EDN: AXVKJG

Abstract. The problem of natural vibrations of a five-layer symmetrical in thickness rod with two fillers is considered. The bearing layers are assumed to be thin, high-strength. The Bernoulli hypotheses on cross-sections of flat and perpendicular to the deformed axial line, after load application, are accepted for them. In relatively thick lightweight aggregates, the Timoshenko hypothesis is fulfilled, according to which the cross-section remains flat and incompressible, but is rotated by some additional angle. The differential equations of the vibrations are obtained with the variational method, taking into account transverse forces of inertia. A transcendental equation for the eigenvalues of a rod with rigidly sealed ends is derived, and its numerical solutions are obtained. The dependence of the natural frequencies of vibrations on the thickness of external bearing layers for different materials of the rod layers is investigated.

Keywords: symmetric five-layer rod, two fillers, eigenvalues, vibration frequencies, numerical results.

For citation: Budnikova, D.A. Natural frequencies of vibration of a five-layer rod / D.A. Budnikova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 11–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_11 (in Russian). – EDN: AXVKJG

Введение

Подходы к разработке методик постановки и решения краевых задач для тонкостенных элементов конструкций, учитывающие воздействие внешней среды, предложены в монографиях [1]–[5]. Кинематические гипотезы, как правило, учитывают относительный сдвиг и работу касательных напряжений в заполнителе, тонкость и жесткость несущих слоев.

В статьях [6], [7] исследовано деформирование композитных круговых пластин со сжимаемым заполнителем и при неосесимметричном нагружении. Сжимаемость материала заполнителя описывает функция, линейная по толщине слоя. Изгиб пятислойной круговой пластины с двумя жесткими заполнителями рассмотрен в публикациях [8]–[9]. Работы [10], [11] посвящены исследованию изгиба трехслойных кольцевых пластин, связанных с упругим основанием

Винклера. Влияние сдвиговых свойств материала основания на напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин (НДС) анализировалось в [12]–[15]. Статья [16] посвящена исследованию влияния температуры на НДС трехслойного стержня с жестким заполнителем. Получены аналитические решения указанных краевых задач при локальных и непрерывных нагрузках. Проведена их численная адаптация.

Публикации [17]–[20] посвящены анализу динамического поведения трехслойных цилиндрических оболочек. Геометрические гипотезы соответствуют ломаной линии, заполнители приняты легкими, т. е. в них не учитывается работа касательных напряжений. Аналитические решения, описывающие собственные и вынужденные колебания, отклик на нестационарные нагружения, получены в виде разложения искомых перемещений в ряд по системам собственных

функций. Колебания круговой пятислойной пластины с двумя легкими заполнителями исследованы в [21], [22].

Здесь приведена постановка и указана методика решения начально-краевой задачи о собственных колебаниях симметричного по толщине пятислойного стержня.

1 Постановка задачи

Декартова система координат в пятислойном стержне связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1.1). В тонких несущих слоях выполняются гипотезы Бернулли, в соответствии с которыми поперечные сечения слоев 1, 2, 4 остаются плоскими и нормальными деформированной осевой линии после воздействия нагрузки. В сравнительно толстых заполнителях 3, 5 справедлива гипотеза Тимошенко: поперечные сечения после приложения нагрузки остаются плоскими, несжимаемыми по толщине, но поворачиваются на дополнительный угол $\psi(x, t)$. Искомые функции являются прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный сдвиг $\psi(x, t)$. Нагрузка $q(x, t)$ предполагается распределенной по верхней плоскости стержня.

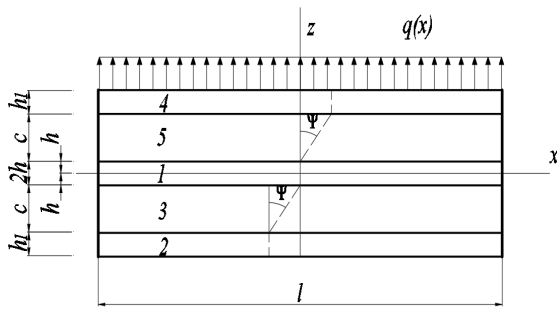


Рисунок 1.1 – Нумерация слоев и геометрия пятислойного стержня

Выражения для продольных перемещений $u_x^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$ – номер слоя) через искомые функции $w(x, t)$, $\psi(x, t)$ получим, исходя из принятых гипотез:

$$\begin{aligned} u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, \quad (c + h \leq z \leq c + h + h_1), \\ u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi, \quad (h \leq z \leq c + h), \\ u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, \quad (-h \leq z \leq h), \\ u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi, \quad (-h - c \leq z \leq -h), \\ u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, \quad (-h - h_1 - c \leq z \leq -h - c), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $c\psi$ – величины смещения внешних несущих слоев за счет сдвига в заполнителях; запятая в нижнем индексе обозначает производную по координате x .

Продольные деформации следуют из соотношений Коши [1] и перемещения в слоях стержня (1.1):

$$\varepsilon_x^{(4)} = -zw_{,xx} + c\psi_{,x}, \quad \varepsilon_{xz}^{(4)} = 0,$$

$$\varepsilon_x^{(5)} = -zw_{,xx} + (z - h)\psi_{,x}, \quad \varepsilon_{xz}^{(5)} = \frac{\psi}{2},$$

$$\varepsilon_x^{(1)} = -zw_{,xx}, \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = -zw_{,xx} + (z + h)\psi_{,x}, \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\psi}{2},$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = -zw_{,xx} - c\psi_{,x}, \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0. \quad (1.2)$$

После определения продольных перемещений и деформаций, напряжения в слоях определяются с помощью закона Гука:

$$\begin{aligned} s_{xx}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \\ s_{xz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \varepsilon_{xz}^{(5)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $s_{xx}^{(k)}$, $s_{xz}^{(3)}$, $s_{xz}^{(5)}$ – компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{xx}^{(k)}$; $\varepsilon_{xx}^{(k)}$, $\varepsilon_{xz}^{(3)}$, $\varepsilon_{xz}^{(5)}$ – компоненты девиатора тензора деформаций, $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}\varepsilon_{xx}^{(k)}$; G_k, K_k – модули упругости материалов слоев (сдвига и объемного деформирования).

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающей поперечные колебания рассматриваемого стержня, используется вариационный принцип Лагранжа с добавлением сил инерции:

$$\delta A = \delta W, \quad (1.4)$$

где δA – виртуальная работа внешней нагрузки, включая силы инерции; δW – вариация работы внутренних усилий

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_S (q - M_0 \ddot{w}) \delta w dx = \int_0^l (b_0 q - M_0 \ddot{w}) \delta w dx, \\ \delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz dx. \end{aligned} \quad (1.5)$$

$M_0 \ddot{w}$ – силы инерции в поперечном направлении, точка сверху обозначает производную по времени, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) b_0 l$, ρ_k – плотность материала, b_0 – ширина поперечного сечения; δ – оператор вариации.

Заметим, что работа касательных напряжений в легком заполнителе в (1.5) не учитывается в связи с их малостью.

Подставим работы (1.5) в уравнение (1.4) с учетом виртуальных деформаций, следующих из (1.2). Выполнение уравнения (1.4) возможно только при равенстве нулю коэффициентов при вариациях искомых функций. Из этого условия получаем уравнения движения:

$$H_{,x} = 0, \quad M_{,xx} - M_0 \ddot{w} = -b_0 q, \quad (1.6)$$

где $H_{,x}$, $M_{,xx}$ – обобщенные (суммарные) внутренние усилия и моменты, определяемые формулами

$$M_x = \sum_{k=1}^5 M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz,$$

$$N_x = \sum_{k=1}^5 N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz,$$

$$H = (M_x^{(3)} + M_x^{(5)}) + c(N_x^{(4)} - N_x^{(2)}) + h(N_x^{(3)} - N_x^{(5)}).$$

Для получения уравнений колебаний пяти-
слойного стержня в искомыми функциях необхо-
димо выразить обобщенные внутренние усилия
через $w(x, t)$, $\psi(x, t)$. С помощью закона Гука (1.3)
имеем

$$\begin{aligned} M_x = & - \left[\frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right] w_{,xx} - \\ & - \left[K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (3h + 2c) \right] \psi_{,x}, \\ H = & \left[-\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right] w_{,xx} + \\ & + \left[c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right] \psi_{,x}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставив выражения (1.7) в уравнения
(1.6), получим искомые уравнения движения в
перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} &= 0, \\ a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - M_0 \ddot{w} &= -q, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где a_i – коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right], \\ a_2 &= \left[\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right], \\ a_4 &= \left[\frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3h^2 + 3c^2 + 3h_1 h + 3h_1 c + 6ch) \right], \\ K_k + \frac{4}{3} G_k &\equiv K_k^+. \end{aligned}$$

В начальный момент времени прогиб $w_0(x)$
стержня и его производная $\dot{w}_0(x)$ по времени
(скорость) считаются заданными:

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x). \quad (1.9)$$

В качестве граничных условий принимаем
условия жесткой заделки торцов стержня $x = 0; l$.

$$\psi(x, t) = w(x, t) = w_{,x}(x, t) = 0. \quad (1.10)$$

2 Уравнения собственных колебаний

Для описания собственных колебаний пяти-
слойного стержня систему дифференциальных
уравнений получим из (1.8), положив нагрузку
 $q = 0$. Проведя необходимые преобразования,
получим:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{a_2}{a_1} w_{,x} + C_1 x + C_2, \\ w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \ddot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Прогиб стержня принимаем в виде произве-
дения неизвестной координатной функции $v(x)$
и гармонической функции времени:

$$w = v(x) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (2.2)$$

где A, B – константы интегрирования.

Вторая производная от прогиба (2.1) будет

$$\ddot{w} = -v(x) \omega^2 [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]. \quad (2.3)$$

Дифференциальное уравнение для опреде-
ления координатной функции $v(x)$ получим, под-
ставив (2.2), (2.3) во второе уравнение системы
(2.1) и приравняв коэффициенты перед функ-
циями времени:

$$v_{,xxxx} - \beta^4 v = 0, \quad (2.4)$$

где введено обозначение $\beta^4 = \frac{a_1 M_0 \omega^2}{a_4 a_1 - a_2^2}$.

Следовательно, параметр β будет собствен-
ным числом оператора четвертой производной, а
 $v(x)$ – его собственной функцией. В результате
исследования было установлено, что знак пара-
метра β всегда положительный [23]. В этом слу-
чае решение дифференциального уравнения (2.4)
будет:

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1 \operatorname{sh}(\beta x) + C_2 \operatorname{ch}(\beta x) + \\ &+ C_3 \sin(\beta x) + C_4 \cos(\beta x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – искомые константы интегри-
рования.

Система уравнений для определения кон-
стант интегрирования в случае граничных усло-
вий заделки (1.9) сводится к системе двух алгеб-
раических уравнений относительно C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 (\operatorname{sh}(\beta l) - \sin(\beta l)) + C_2 (\operatorname{ch}(\beta l) - \cos(\beta l)) &= 0, \\ C_1 (\operatorname{ch}(\beta l) - \cos(\beta l)) + C_2 (\operatorname{sh}(\beta l) + \sin(\beta l)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Полученная однородная система (2.6) имеет
ненулевое решение только при равенстве нулю
ее определителя. Отсюда получаем трансцен-
дентное уравнение для определения собственных
чисел:

$$\operatorname{sh}^2(\beta l) - \sin^2(\beta l) - (\operatorname{ch}(\beta l) - \cos(\beta l))^2 = 0. \quad (2.7)$$

Решением уравнения (2.7) будет бесконеч-
ное количество собственных чисел β_n
($n = 0, 1, 2, \dots$), после нахождения которых часто-
ты собственных колебаний рассматриваемого
стержня можно определить по формуле, введен-
ной в (2.4):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4 (a_4 a_1 - a_2^2)}{a_1 M_0}.$$

3 Численные результаты

Первые 15 собственных чисел β_n и частот
собственных колебаний ω_n пятислойного
стержня ($l = 1, b_0 = 0,1$), набранного из материа-
лов Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 –
Д16Т приведены в таблице 3.1. Упругие характери-
стики этих и других используемых материалов:

– Д16-Т – $K = 0,9214 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0,2671 \cdot 10^5$ МПа;
 – фторопласт-4 – $K = 4700$ МПа, $G = 90$ МПа;
 – титановый сплав – $K = 1,04 \cdot 10^5$ МПа,
 $G = 0,41 \cdot 10^5$ МПа;

– кордиерит – $K = 5,58 \cdot 10^5$ МПа, $G = 2,58 \cdot 10^5$ МПа.
 Толщины слоев, если другое не указано, следующие: $h = h_1 = 0,02$, $c = 0,1$.

Следует отметить, что приведенные собственные числа распределены по числовой оси достаточно равномерно.

Таблица 3.1 – Собственные числа и частоты пятислойного стержня

№ n	β_n	$\omega_n, \text{с}^{-1}$	№ n	β_n	$\omega_n, \text{с}^{-1}$
0	4,730	2971,682	8	29,8451	118309,477
1	7,853	8191,556	9	32,987	144527,644
2	10,995	16058,725	10	36,128	173367,627
3	14,137	26545,888	11	42,412	238913,044
4	17,279	39654,977	12	45,553	275618,477
5	20,420	55385,877	13	48,695	314945,727
6	23,562	73738,594	14	51,836	356894,793
7	26,704	94713,127			

На рисунке 3.1 показана зависимость первых трех частот собственных колебаний пятислойного стержня от толщины внутреннего несущего слоя h . Толщины и материалы слоев указаны ранее. С увеличением номера зависимость частоты от толщины внутреннего несущего слоя нелинейная.

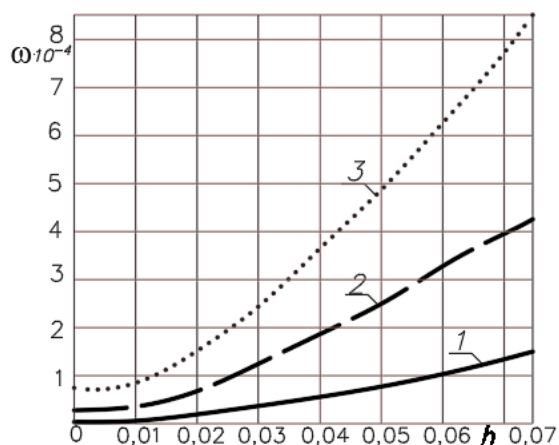


Рисунок 3.1 – Зависимость первых трех частот ω_n от толщины внутреннего несущего слоя h
 1 – ω_0 ; 2 – ω_1 ; 3 – ω_2

На рисунке 3.2 представлена зависимость первой частоты основного тона ω_0 от толщины h центрального слоя при различных материалах внешних несущих слоев. Существенное различие наблюдается при достаточно тонких слоях. Далее кривые сближаются.

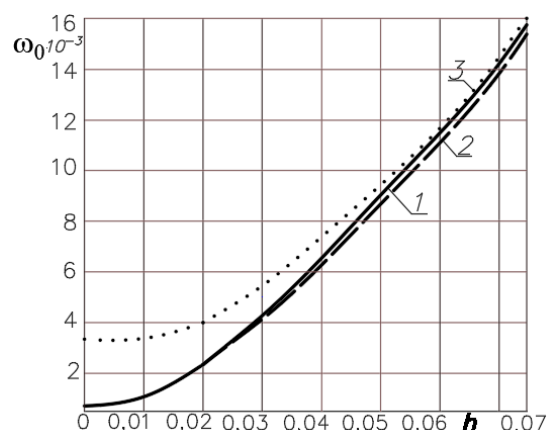


Рисунок 3.2 – Зависимость ω_0 от толщины центрального слоя h (различные несущие слои)
 1 – Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т,
 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан,
 3 – кордиерит – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – кордиерит

Рисунок 3.3 отражает зависимость первой частоты ω_0 от толщины центрального слоя h при различных материалах заполнителя. Несущие слои приняты из дюралюминия. Использование более легких полимерных материалов в качестве заполнителя приводит к увеличению собственной частоты колебаний стержня.

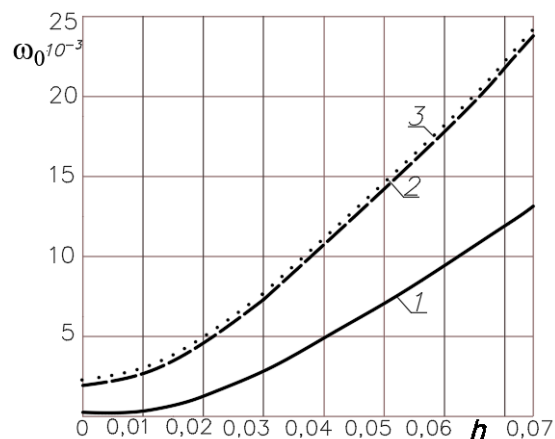


Рисунок 3.3 – Зависимость ω_0 от толщины центрального слоя h (различные несущие слои)
 1 – фторопласт; 2 – пенопласт;
 3 – пенополиуретан

Заключение

Предложенная в работе постановка начально-краевой задачи, полученные формулы и вычисленные значения собственных чисел позволяют проводить численный анализ зависимости частот собственных колебаний симметричного по толщине пятислойного стержня от материалов слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN: RXGSLJ.
 2. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела // М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
 3. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body / M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
 4. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
 5. Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. – Гомель: БелГУТ, 2024. – 395 с.
 6. Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
 7. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.
 8. Салицкий, В.С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31. – EDN: APZZLI.
 9. Салицкий, В.С. Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – Гомель, 2022. – вып. 15 – С. 209–213.
 10. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62. – EDN: HZNSAB.
 11. Старовойтов, Э.И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120. – EDN: DIPPEO.
 12. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.
 13. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.
 14. Трацевская, Е.Ю. Демпфирующие свойства слабосвязных трехфазных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. – 2019. – Т. 51, № 2. – С. 115–121.
 15. Трацевская, Е.Ю. Экспериментальное исследование параметров автотранспортного вибродинамического воздействия на массивы грунтов / Е.Ю. Трацевская // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: наука и транспорт. – 2020. – № 1 (40). – С. 58–61.
 16. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.
 17. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
 18. Leonenko, D.V. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367. – DOI: 10.1007/s10778-016-0760-8.
 19. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152.
 20. Fedotenkov, G.V. Identification of nonstationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovsky, Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, № 4. – P. 439–447.
 21. Лачугина, Е.А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – № 16. – С. 111–116. – EDN: RCCPM.
 22. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.
 23. Будникова, Д.А. Уравнения собственных колебаний пятислойного упругого стержня / Д.А. Будникова // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. году качества (Гомель, 21–22 ноября 2024 г.): в 2 ч. – Гомель: БелГУТ, 2024. – Ч. 2. – С. 121–123.
- Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».
- Поступила в редакцию 26.02.2025.

Информация об авторах

Будникова Дарья Андреевна – магистрант