ФИЗИКА

УДК 539.12 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_16
EDN: YCVASK

ФОРМ-ФАКТОРЫ НЕЙТРАЛЬНЫХ ПСЕВДОСКАЛЯРНЫХ $P^0(q\bar{q})$-МЕЗОНОВ В СОСТАВНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

В.Ю. Гавриш[1], **В.В. Андреев**[2]

[1]*Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

PSEUDOSCALAR $P^0(q\bar{q})$-MESONS FORM-FACTOR IN COMPOSITE RELATIVISTIC QUARK MODEL

V.Yu. Haurysh[1], **V.V. Andreev**[2]

[1]*Sukhoi State Technical University of Gomel*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Представлен алгоритм расчета форм-факторов мезонов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в модели, основанной на составной кварковой модели и точечной форме пуанкаре-инвариантной квантовой механике. Показано, что использование структурных функций конституентных кварков легкого сектора приводит к согласующемуся с экспериментальными данными поведению величины $q^2F_{P^0}(q^2)$ процессов $\gamma\gamma^* \to \pi^0$, $\gamma\gamma^* \to \eta$ и $\gamma\gamma^* \to \eta'$ при больших переданных импульсах. По результатам работы предложена самосогласованная модель, удовлетворительно описывающая электрослабые распады псевдоскалярных мезонов легкого сектора.

Ключевые слова: *конституентная кварковая модель*, *аномальный магнитный момент*, *среднеквадратичный радиус*, *форм-фактор*, *асимптотическое поведение.*

Для цитирования: *Гавриш, В.Ю.* Форм-факторы нейтральных псевдоскалярных $P^0(q\bar{q})$-мезонов в составной релятивистской кварковой модели / В.Ю. Гавриш, В.В. Андреев // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 16–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_16. – EDN: YCVASK

Abstract. The paper presents an algorithm for calculating the meson form factors of the $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ process in a model based on the composite quark model and the point form of Poincaré-invariant quantum mechanics. It is shown that the use of structure functions of constituent quarks for the light sector leads to a behavior of the $q^2F_{P^0}(q^2)$ value of the $\gamma\gamma^* \to \pi^0$, $\gamma\gamma^* \to \eta$ and $\gamma\gamma^* \to \eta'$ processes at large momentum transfers consistent with experimental data. A self-consistent model satisfactorily describing electroweak decays of pseudoscalar mesons of the light sector is proposed.

Keywords: *constituent quark model*, *anomalous magnetic moment*, *root-mean-square radius*, *form factor*, *asymptotic behavior.*

For citation: *Haurysh, V.Yu.* Pseudoscalar $P^0(q\bar{q})$-mesons form-factor in composite relativistic quark model / V.Yu. Haurysh, V.V. Andreev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 16–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_16 (in Russian). – EDN: YCVASK

Введение

Расчет наблюдаемых электрослабых характеристик связанных кварковых систем является нетривиальной задачей физики высоких энергий. В низкоэнергетической области поведение константы $\alpha_s(q^2)$ делает расчеты наблюдаемых характеристик связанных кварковых систем методами теории возмущений невозможными [1]. Указанная особенность привела к многообразию альтернативных методов расчета форм-факторов, спектров масс и других характеристик мезонов легкого и тяжелого сектора.

Отметим, что для мезонов с одним тяжелым кварком ($D-$, D_s-, $B-$ мезоны и др.) существуют апробированные методы [2], [3] (разложение по величине $1/m_Q$, симметрия HQS, использование нерелятивистских потенциалов с запирающей частью и др.). Для мезонов легкого сектора требуется привлечение чисто релятивистских моделей, поскольку массы $u-$, $d-$, $s-$ кварков значительно меньше [4].

В указанном направлении исследования особый интерес представляют легкие псевдоскалярные $\pi^{\pm}-, \pi^0-, K^{\pm}-, \eta-, \eta'-$ мезоны.

© *Гавриш В.Ю.*, *Андреев В.В.*, 2025

К настоящему моменту накоплен значительный объем прецизионных экспериментальных данных по лептонным и радиационным распадам. Обновление и дополнение экспериментальных данных коллаборациями *BaBar*, *Belle* и *Cleo* [4]–[7] дало возможность не только исследовать поведение величины $q^2F_{P^0}(q^2)$ при $q^2 \to \infty$ но и изучить структурные свойства конституентных кварков при больших переданных импульсах.

Исследование форм-факторов нейтральных $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов также актуально при изучении схем смешивания кварковых $q\bar{q}$ -состояний. Известно [8], что расчеты с одним углом смешивания θ_P в различных подходах приводит к значениям $\theta_P \in [-20^\circ, -9^\circ]$. Разброс привел к появлению альтернативных схем смешивания, в том числе с тремя углами ϕ_P, α_G, ϕ_G и глюонной компонентой $|G\rangle$ [8]–[10]. Отметим, что исследования псевдоскалярных и векторных мезонов проводились не только с учетом $|G\rangle$, но и аномальными магнитными моментами конституентных кварков κ_q [11], [12].

Среди множества способов описания релятивистских составных кварковых систем можно выделить методы, которые основаны на использовании представлений группы Пуанкаре [13]. В этом подходе ключевым требованием является сохранение пуанкаре-инвариантности как для системы без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц [14]. Поэтому такой подход получил название «пуанкаре-инвариантная квантовая механика» (ПиКМ). В зависимости от того, как оператор взаимодействия включается в ПиКМ, выделяют три формы: мгновенную, точечную и динамику на световом фронте [14].

Представленная работа посвящена изучению форм-факторов псевдоскалярных мезонов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в точечной форме ПиКМ. Отметим, что указанная форма динамики естественным образом обобщается для исследования связанных систем, поскольку оператор 4-ре скорости $V^\mu = Q^\mu / M$ с взаимодействием и без него совпадают [13], [14].

Структура представленной работы следующая: в разделе 1 приведены базовые соотношения модели, основанной на составной кварковой модели и на точечной форме ПиКМ. Показано, что использование осцилляторной волновой функции и константы псевдоскалярной плотности приводит к разумным параметрам развиваемой модели. В разделе 2 изложена методика расчета форм-факторов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$. Отличительной особенностью предложенного подхода является использование аномальных магнитных моментов кварков и схемы смешивания псевдоскалярных мезонов с глюонной компонентой $|G\rangle$.

Как результат работы в разделе 3 проведено численное исследование форм-факторов псевдоскалярных $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов. Показано, что использование параметров модели, полученных из лептонных распадов псевдоскалярных мезонов и аномальных магнитных моментов кварков удовлетворительно описывает современные экспериментальные данные коллабораций *BaBar*, *Belle* и *Cleo* в области малых переданных импульсов.

1 Описание модели

Ниже определим вектор состояния мезона массы *M*, спина J и 4-импульса

$$Q^\mu = V^\mu M = \{\omega_M(\mathbf{Q}), \mathbf{Q}\},$$

$Q^2 = M^2$ в точечной форме ПиКМ. В развиваемом формализме вектор состояния мезона определим с использованием базиса прямого произведения двухчастичного представления

$$|\mathbf{p}_1, \lambda_1, a, \mathbf{p}_2, \lambda_2, b\rangle$$

кварков с массами m_q, $m_{\bar{Q}}$, импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, проекциями спинов λ_1, λ_2 и цветовыми квантовыми числами a и b соответственно. В таком подходе вектор состояния мезона определяется интегралом по импульсу относительного движения кварков [13], [14] $\mathbf{k}$ как

$$\begin{aligned} &|\mathbf{Q}, J\mu, M\rangle = \\ &= \sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\nu_1,\nu_2}\int \Phi^J_{\ell S}(\mathbf{k}, \beta_{q\bar{Q}})\Omega\begin{pmatrix} \ell & S & J \\ \nu_1 & \nu_2 & \mu \end{pmatrix}(\theta_k, \phi_k)\times \\ &\times\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(\mathbf{p}_1)\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{p}_2)}{\omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})V_0}}\, D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\mathbf{n}_{W_1})\, D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}(\mathbf{n}_{W_2})\times \\ &\times|\mathbf{p}_1, \lambda_1, a, \mathbf{p}_2, \lambda_2, b\rangle \mathrm{d}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В (1.1) для краткости использованы обозначения $\omega_m(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и

$$\begin{aligned} &\Omega\begin{pmatrix} \ell & S & J \\ \nu_1 & \nu_2 & \mu \end{pmatrix}(\theta_k, \phi_k) = \\ &= Y_{\ell m}(\theta_k, \phi_k)\, C\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ \nu_1 & \nu_2 & \mu \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} \ell & S & J \\ m & \lambda & \mu \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $Y_{\ell m}(\theta_k, \phi_k)$ – сферические функции, определяемые углами вектора $\mathbf{k}$, $C\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ \nu_1 & \nu_2 & \mu \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} \ell & S & J \\ m & \lambda & \mu \end{pmatrix}$ – коэффициенты Клебша – Гордана группы *SU(2)*, $D^{1/2}_{\lambda,\nu}(\mathbf{n}_W)$ – функции вращения Вигнера вектор параметра $\mathbf{n}_W$ [14].

Параметры развиваемой модели определим с использованием интегрального представления лептонной константы распада псевдоскалярного

$$P^{\pm}(q\bar{Q}) \to \ell^{\pm}\nu_{\ell}$$

и векторного мезонов $V^0(q\bar{Q}) \to \ell^+\ell^-$ [15], [16]

$$f_I(m_q, m_{\bar{Q}}, \beta^I_{q\bar{Q}}) =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\pi}\int \mathrm{k}^2 \;\; \Phi(\mathrm{k}, \beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}) \sqrt{\frac{W^+_{m_q}(\mathbf{k}) W^+_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}{M_0 \;\; \omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}} \times$$

$$\times \left(1 + a_1 \frac{\mathrm{k}^2}{W^+_{m_q}(\mathbf{k}) W^+_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}\right) \mathrm{dk}; \qquad (1.3)$$

$$a_P = -1, \;\; a_V = 1/3,$$

где

$$W^{\pm}_m(\mathbf{k}) = \omega_m(\mathbf{k}) \pm m, \;\; |\,\mathbf{k}\,| = \mathrm{k},$$
$$M_0 = \omega_{m_q}(\mathbf{k}) + \omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k}). \qquad (1.4)$$

Использование константы псевдоскалярной плотности $g_{P^{\pm}}$ [17], [18]

$$g_{P^{\pm}}(m_q, m_{\bar{Q}}, \beta^P_{q\bar{Q}}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\pi}\int \mathrm{k}^2 \;\; \Phi(\mathrm{k}, \beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}) \times$$

$$\times \sqrt{M_0}\left(W^+_{m_q}(\mathbf{k}) W^+_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k}) + W^-_{m_q}(\mathbf{k}) W^-_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})\right) \mathrm{dk} \quad (1.5)$$

совместно с экспериментальными данными лептонных распадов псевдоскалярных $\pi^{\pm}-$ и $K^{\pm}-$ мезонов приводит к системе уравнений [17]

$$\begin{cases} 1/2\,(\hat{m}_u + \hat{m}_d) = (3,45 \pm 0,42) \text{ МэВ}, \\ f_P(m_u, m_d, \beta^P_{u\bar{d}}) = f^{(\text{экс.})}_{\pi^{\pm}}, \\ (\hat{m}_u + \hat{m}_d) g_P(m_u, m_d, \beta^P_{u\bar{d}}) = f^{(\text{экс.})}_{\pi^{\pm}} \left(M^{(\text{экс.})}_{\pi^{\pm}}\right)^2. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Использование осцилляторной волновой функции

$$\Phi(\mathrm{k}, \beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}) = \frac{2}{\sqrt{3}\;\pi^{1/4}\left(\beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}\right)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mathrm{k}^2}{2\left(\beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}\right)^2}\right] \qquad (1.7)$$

и значений токовых масс $u-$ и $d-$ кварков приводит к следующим параметрам модели, основанной на точечной форме ПиКМ:

$$m_u = \left(219,48 \pm 9,60\right) \text{ МэВ},$$
$$m_d = \left(221,98 \pm 9,60\right) \text{ МэВ},$$
$$\beta^P_{ud} = \left(367,93 \pm 2,51\right) \text{ МэВ}. \qquad (1.8)$$

Для $K^{\pm}-$ мезона с массой $M^{(\text{экс.})}_{K^{\pm}}$ аналогично получаем

$$\begin{cases} 1/2\,(\hat{m}_u + \hat{m}_s) = (47,58 \pm 5,74) \text{ МэВ}, \\ f_P(m_u, m_s, \beta^P_{u\bar{s}}) = f^{(\text{экс.})}_{K^{\pm}}, \\ (\hat{m}_u + \hat{m}_s) g_P(m_u, m_s, \beta^P_{u\bar{s}}) = f^{(\text{экс.})}_{K^{\pm}} \left(M^{(\text{экс.})}_{K^{\pm}}\right)^2, \end{cases} \qquad (1.9)$$

откуда

$$m_s = \left(416,95 \pm 6,12\right) \text{ МэВ},$$
$$\beta^P_{us} = \left(375,54 \pm 19,66\right) \text{ МэВ}. \qquad (1.10)$$

Полученные в разделе параметры будут использоваться для расчета форм-факторов псевдоскалярных $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов.

2 Форм-факторы $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$

Изучение форм-факторов псевдоскалярных мезонов будем проводить с использованием следующего механизма рождения кварк-антикварковой пары [19], [20] (рисунок 2.1). Соответствующие рисунку 2.1 матричные элементы процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в системе покоя псевдоскалярного мезона (сравните с (1.1))

$$\left|0, M_P\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \int \Phi^J_{\ell S}(\mathrm{k}, \beta^P_{q\bar{q}}) \frac{1}{\sqrt{V_0}} \left|\mathbf{k}, \lambda_1, -\mathbf{k}, \lambda_2\right\rangle \mathrm{d}\mathbf{k} \qquad (2.1)$$

примут следующий вид:

$$M^{1\mu}_{\lambda_1,\lambda_2} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\bar{u}_{\lambda_2}(\mathbf{k}, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m_q}(\mathbf{k})}} \Gamma^{\mu}_{e_q}(q^{real}) \times$$

$$\times \frac{\hat{k} - \hat{q}^{real} + m_q}{\left(k - q^{real}\right)^2 - m_q^2}\left(\Gamma_{e_q}(q^{virt.}) \cdot \epsilon(\lambda^{virt.})\right) \frac{\upsilon_{\lambda_1}(-\mathbf{k}, m_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})}},$$

$$M^{2\mu}_{\lambda_1,\lambda_2} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\bar{u}_{\lambda_2}(\mathbf{k}, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m_q}(\mathbf{k})}}\left(\Gamma_{e_q}(q^{virt.}) \cdot \epsilon(\lambda^{virt.})\right) \times \qquad (2.2)$$

$$\times \frac{\hat{k} - \hat{q}^{virt.} + m_q}{\left(k - q^{virt.}\right)^2 - m_q^2} \Gamma^{\mu}_{e_{\bar{q}}}(q^{real}) \frac{\upsilon_{\lambda_1}(-\mathbf{k}, m_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})}}.$$

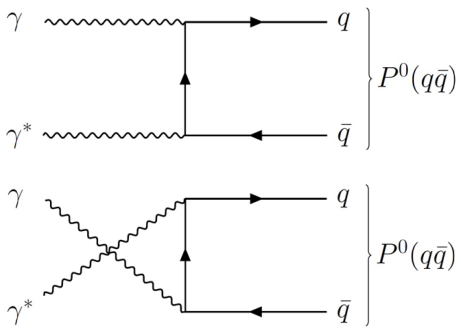

Рисунок 2.1 – Механизм процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в развиваемом подходе

В выражениях (2.2) определена вершина электромагнитного взаимодействия $\Gamma^{\mu}(q)$ с учетом структуры кварка калибровочно-инвариантным образом

$$\Gamma^{\mu}_e(q) = e\left(F^q_1(q^2)\gamma^{\mu} + \kappa\, F^q_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_{\nu}\right),$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right), \qquad (2.3)$$

где $F^q_1(q^2)$ и $F^q_2(q^2)$ – дираковские форм-факторы. Для упрощения в форм-факторах

вершины (2.3) в явном виде выделены электрический заряд e и аномальный магнитный момент кварка κ. В этом случае магнитный момент кварка определяется выражением [21], [22]

$$\mu = \frac{e}{2\, m_{q,\bar{Q}}}\left(1+\kappa\ \right). \qquad (2.4)$$

Расчет спинорной части выражения (2.2) с учетом параметризации процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в точечной форме динамики

$$\left\langle \mathrm{Q}, M_P \middle| \hat{J}^{\mu} \middle| \gamma\gamma^* \right\rangle = $$

$$= I_{q\bar{q}}(t)\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ V_{\nu}\ \varepsilon_{\rho}(\lambda^{real})\ q_{\sigma}^{virt.}}{\sqrt{2\ V_0}}\sqrt{M_P}, \qquad (2.5)$$

где q^{real} – 4-импульс реального $\left(q^{real}\right)^2 = 0$ фотона с соответствующим вектором поляризации $\varepsilon(\lambda^{real.})$, а $q^{virt.}$ – 4-импульс виртуального $\left(q^{virt.}\right)^2 = t$ γ^*-кванта, приводит к следующему выражению

$$I_{q\bar{q}}(t) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int \mathrm{k}^2\ \ \Phi(\mathrm{k}, \beta_{q\bar{q}}^{P}) e_q^2\ \times \qquad (2.6)$$

$$\times\left(f_1(\mathrm{k}, m_q, t) + \frac{\kappa_q}{2m_q} f_2(\mathrm{k}, m_q, t) + \frac{\kappa_q^2}{4m_q^2} f_3(\mathrm{k}, m_q, t)\right)\mathrm{dk}.$$

В (2.6) определены следующие вспомогательные функции:

$$f_1(\mathrm{k}, m, t) = \frac{2mF_1^q(t)F_1^q(0)}{\mathrm{k}\ \omega_m^{1/2}(\mathbf{k})\ \left(4\omega_m^2(\mathbf{k})+t\right)}\ln\left(\frac{\omega_m(\mathbf{k})+\mathrm{k}}{\omega_m(\mathbf{k})-\mathrm{k}}\right),$$

$$f_2(\mathrm{k}, m, t) = \frac{2(F_1^q(t)F_2^q(0)+F_1^q(0)F_2^q(t))}{\mathrm{k}\ \omega_m^{1/2}(\mathbf{k})\ (4\omega_m^2(\mathbf{k})+t)}\times$$

$$\times\left(2\ \mathrm{k}\ \omega_m\ (\mathbf{k}) + m^2\ln\left(\frac{\omega_m(\mathbf{k})+\mathrm{k}}{\omega_m(\mathbf{k})-\mathrm{k}}\right)\right),$$

$$f_3(\mathrm{k}, m, t) = \frac{2m\ (4\omega_m^2(\mathbf{k})-t)}{\omega^{3/2}(\mathbf{k})(4\omega_m^2(\mathbf{k})+t)}F_2^q(t)F_2^q(0). \qquad (2.7)$$

Использование (2.6) с учетом схемы смешивания псевдоскалярных мезонов [8]–[10] приводит к следующим выражениям форм-факторов π^0-, $\eta-$, $\eta'-$ мезонов

$$F_{\pi^0\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) - \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)\right),$$

$$F_{\eta\gamma}(t) = \frac{X_{\eta}}{\sqrt{2}}\ \left(\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) + \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)\right) + Y_{\eta}\ \tilde{I}_{s\bar{s}}(t),$$

$$F_{\eta'\gamma}(t) = \frac{X_{\eta'}}{\sqrt{2}}\ \left(\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) + \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)\right) + Y_{\eta'}\ \tilde{I}_{s\bar{s}}(t), \qquad (2.8)$$

где

$$X_{\eta} = \cos\phi_P\cos\alpha_G,\ \ Y_{\eta} = -\sin\phi_P\cos\alpha_G,$$

$$Z_{\eta} = -\sin\alpha_G,$$

$$X_{\eta'} = \cos\phi_P\sin\alpha_G\sin\phi_G + \sin\phi_P\cos\alpha_G,$$

$$Y_{\eta'} = \cos\phi_P\cos\alpha_G - \sin\phi_P\sin\alpha_G\sin\phi_G,$$

$$Z_{\eta'} = \cos\alpha_G\sin\phi_G \qquad (2.9)$$

(детали изложены в [16]). Выражения (2.4)–(2.9) будут использоваться для изучения форм-факторов псевдоскалярных мезонов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в предложенном подходе.

3 Численные расчеты форм-факторов $\gamma\gamma^* \to \pi^0$, $\gamma\gamma^* \to \eta$ и $\gamma\gamma^* \to \eta'$

Ниже проведем численное моделирование поведения форм-факторов псевдоскалярных мезонов в точечной форме ПиКМ в сравнении с современными экспериментальными данными. Изучение будем проводить с использованием форм-факторов вида [11]

$$F_1^q(t) = \frac{b_q}{1+\left\langle r_q^2\right\rangle\frac{t}{6}},\ F_2^q(t) = \frac{b_q}{\left(1+\left\langle r_q^2\right\rangle\frac{t}{12}\right)^2}, \qquad (3.1)$$

где b_q – параметр виртуальности кварка [23], а $\left\langle r_q^2\right\rangle$ – его среднеквадратичный радиус [24], определяем выражением

$$\left\langle r_q^2\right\rangle = \frac{a}{m_q^2},\ a = 0{,}126. \qquad (3.2)$$

С использованием базовых параметров модели (1.8), а также выражений (2.6)–(2.9) получаем следующее поведение величины $q\ F_{\pi^0\gamma}(t)$ в сравнении с современными экспериментальными данными коллабораций *BaBar*, *Cleo* и *Belle* (рисунок 3.1).

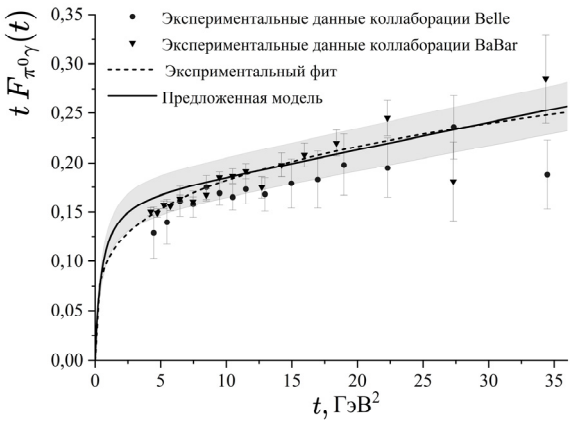

Рисунок 3.1 – Поведение величины $t\ F_{\pi^0\gamma}(t)$ в сравнении с экспериментальными данными

Для $\eta-, \eta'-$ мезонов аналогично получаем (рисунки 3.2, 3.3). Отметим, что при расчетах использованы значения параметров виртуальности кварков легкого сектора

$$b_u = 1{,}04,\ \ b_d = 1{,}10,\ \ b_s = 0{,}90 \qquad (3.3)$$

а также значения аномальных магнитных моментов кварков $\kappa_u = -0{,}124$, $\kappa_d = -0{,}058$ и $\kappa_s = 0{,}198$.

Оценку полученных результатов в сравнении с экспериментальными данными получим с использованием величины

$$\chi^2_{d.o.f} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\left|t_i\ F^{(экс.)}_{P^0\gamma}(t_i)\right| - \left|t_i\ F^{(экс.)}_{P^0\gamma}(t_i)\right|}{\delta\left|t_i F^{(экс.)}_{P^0\gamma}(t_i)\right|}\right)^2; \quad (3.4)$$

расчет с использованием параметров (3.2), а также значений аномальных магнитных моментов $u-,\ d-,\ s-$ кварков приводит к значению

$$\chi^2_{d.o.f} = 7,080. \quad (3.5)$$

Анализ рисунков показывает, что предложенная релятивистская кварковая модель, основанная на точечной форме ПиКМ, удовлетворительно описывает данные *BaBar*, *Cleo* и *Belle* в пределах экспериментальной ошибки.

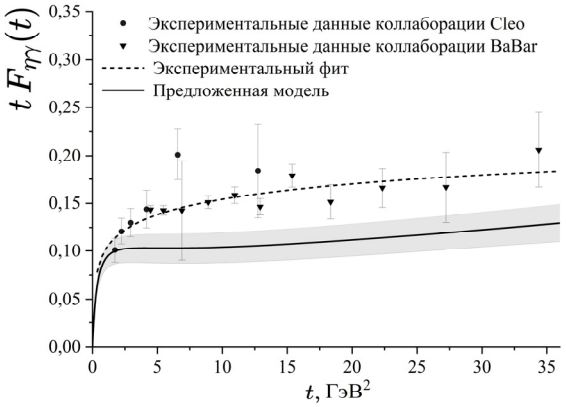

Рисунок 3.2 – Поведение величины $t\,F_{\eta\gamma}(t)$ в сравнении с экспериментальными данными

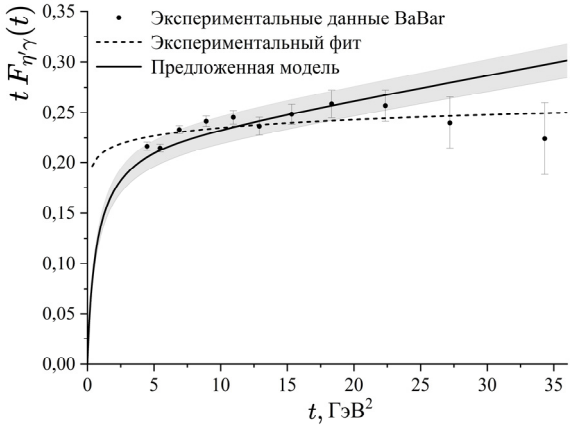

Рисунок 3.3 – Поведение величины $t\,F_{\eta'\gamma}(t)$ в сравнении с экспериментальными данными

Заключение

Работа посвящена изучению электромагнитных распадов легких $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов в точечной форме ПиКМ. В работе авторами предложена оригинальная методика расчета параметров модели с использованием константы псевдоскалярной плотности и токовых масс кварков легкого сектора. Полученные параметры разрабатываемой модели использованы при исследовании поведения величины $q^2F_{P^0\gamma}(q^2)$ в зависимости от переданного импульса виртуального фотона $q^2 = t$. Из особенностей проведенных расчетов следует отметить использование среднеквадратичного радиуса кварков легкого сектора (3.2), совместно с дираковскими форм-факторами $F_1^q(t)$, $F_2^q(t)$ и параметрами виртуальности кварков. Расчеты с учетом перечисленных характеристик конституентных кварков в модели, основанной на составной кварковой модели и на точечной форме ПиКМ, проведены впервые.

Отметим, что предложенная модель дает более надежные предсказания в области малых переданных импульсов. Так расчет $\chi^2_{d.o.f}$ в области $0 < t \le 10$ ГэВ^2 приводит к значению $\chi^2_{d.o.f} = 11,154$, что сопоставимо с значением (3.5). Однако анализ рисунков 3.1, 3.2, 3.3 показывает, что наибольшее отклонение от экспериментальных данных имеется для η-мезона. Так расчет $\chi^2_{d.o.f}$ процессов $\gamma\gamma^* \to \pi$ приводит к $\chi^2_{d.o.f} = 9,708$ и $\chi^2_{d.o.f} = 1,552$ для экспериментальных данных *BaBar* [5] и *Belle* [6] ссоответственно; аналогичные расчеты для $\gamma\gamma^* \to \eta'$ приводят к значению $\chi^2_{d.o.f} = 2,723$ (сравните с $\chi^2_{d.o.f} = 26,815$ для процесса $\gamma\gamma^* \to \eta$). В области $t > 10$ ГэВ^2 эффекты перерассеяния будут значительны [25], и как следствие, требуется учет дополнительных диаграмм в сравнении с изучаемым в работе механизмом распада (рисунок 2.1).

Отметим также, что значения ϕ_P, α_G, ϕ_G в выражении (2.9) выбирались в из условия соответствия теоретических расчетов с экспериментальными данными процессов $V(P) \to P(V)\gamma$, значения которых согласуются с экспериментальными данными коллаборации *Kloe* [26]. Анализ форм-факторов $t\,F_{P^0\gamma}(t)$ с другими углами смешения в предложенной работе авторами не проводился.

В заключении также отметим, что предложенная модель, основанная на конституентной кварковой модели и точечной форме ПиКМ, удовлетворительно описывает радиационные распады псевдоскалярных и векторных мезонов $V(P) \to P(V)\gamma$, форм-факторы $\rho-$ мезона, а также аксиальный и векторный форм-факторы радиационного распада $\pi^\pm \to \ell^\pm \nu_\ell \gamma$ псевдоскалярного $\pi^\pm$-мезона. Предложенная модель также успешно использовалась для исследования адронного распада $\rho \to \pi\pi$ с использованием теоремы о мягких пионах [27].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chetyrkin*, *K.G.* Strong coupling constant with flavor thresholds at four loops in the modified minimal-subtraction scheme / K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, M. Steinhauser // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79, № 12. – P. 2184–2187.

2. *Georgi*, *H.* An effective field theory for heavy quarks at low energies / H. Georgi // Physics Letters B. – 1990. – Vol. 240. – P. 447–450.

3. *Thomas*, *M.* A Derivation of the heavy quark effective Lagrangian from QCD / M. Thomas, R. Winston, Zb. Ryzak // Nucl. Phys. B. – 1992. – Vol. 368. – P. 204–217.

4. *Review of Particle Physics* / S. Navas [et al.] (PDG group) // Phys. Rev. D. – 2024. – Vol. 110. – P. 030001

5. *Measurement of the* $\gamma\gamma^* \to \pi^0$ *transition form factor* / B. Aubert [et al.] (BaBar Collaboration) // Phys. Rev. D. – 2009. – Vol. 80. – P. 052002.

6. *Measurement of* $\gamma\gamma^* \to \pi^0$ *transition form factor at Belle* / S. Uehara [et al.] (Belle collaboration) // Phys. Rev. D. – 2012. – Vol. 86. – P. 092007.

7. *Measurement of the* $\gamma\gamma^* \to \eta$ *and* $\gamma\gamma^* \to \eta'$ *transition form factors* / P. del Amo Sanchez [et al.] (BaBar collaboration) // Phys. Rev. D. – 2011. – Vol. 84. – P. 052001.

8. *Escribano*, *R.* On the gluon content of the η and η' mesons / R. Escribano, J. Nadal // JHEP. – 2007. – Vol. 05. – P. 006.

9. *Feldmann*, *T.* Quark structure of pseudoscalar mesons / T. Feldmann // Int. J. Mod. Phys. A. – 2000. – Vol. 15. – P. 159–207.

10. *Feldmann*, *T.* Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons / T. Feldmann, P. Kroll, B. Stech // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 58. – P. 114006.

11. *Petronzio*, *R.* Possible evidence of extended objects inside the proton / R. Petronzio, S. Simula, G. Ricco // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67. – P. 094994.

12. *Fayazbakhsh*, *Sh.* Anomalous magnetic moment of hot quarks, inverse magnetic catalysis, and reentrance of the chiral symmetry broken phase / Sh. Fayazbakhsh, N. Sadooghi // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 90. – P. 105030.

13. *Keister*, *B.D.* Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–279.

14. *Mini review of Poincaré invariant quantum theory* / W.N. Polyzou, Y. Huang, Ch. Elster [et al.] // Few Body Syst. – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147.

15. *Andreev*, *V.V.* Constituent quark masses in Poincaré-invariant quantum mechanics / V.V. Andreev, V.Yu. Haurysh // J. Phys. Conf. Ser. – 2017. – Vol. 938. – P. 012030.

16. *Гавриш*, *В.Ю.* Двухфотонный распад псевдоскалярного мезона в релятивистской кварковой модели / В.Ю. Гавриш, В.В. Андреев // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 4. – С. 315–327.

17. *Haurysh*, *V.Yu.* $\rho-$ meson form-factors in point form of Poincaré-invariant quantum mechanics // V.Yu. Haurysh, V.V. Andreev // Few Body Syst. – 2021. – Vol. 62. – 9 p.

18. *Jaus*, *W.* Consistent treatment of spin-1 mesons in the light-front quark model / W. Jaus. // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67. – P. 094010.

19. *Choi*, *H.-M.* Spacelike and timelike form factors for the $\pi^0, \eta, \eta' \to \gamma\gamma^*$ transitions in the light-front quark model / H.-M. Choi, Y.Y. Ryu, Ch.-R. Ji // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 96. – P. 056008.

20. *Choi*, *H.-M.* Doubly virtual $\left(\pi^0, \eta, \eta'\right) \to \gamma\gamma^*$ transition form factors in the light-front quark model / H.-M. Choi, Y.Y. Ryu, Ch.-R. Ji // Phys. Rev. D. – 2019. – Vol. 99. – P. 076012.

21. *He*, *R.* Effect of anomalous magnetic moment on the chiral transition at zero temperature in a strong magnetic field / R. He, X. J. Wen // Phys. Rev. D. – 2022. – Vol. 107. – P. 116023.

22. *Juliá-Díaz*, *B.* Baryon magnetic moments in relativistic quark models / B. Juliá-Díaz, D.O. Riska // Nuclear Physics A. – 2004. – Vol. 739. – P. 69–88.

23. From the $\gamma\gamma \to p\bar{p}$ reaction to the production of $p\bar{p}$ pairs in ultraperipheral ultrarelativistic heavy-ion collisions at the LHC / M. Kłusek-Gawenda, P. Lebiedowicz, O. Nachtmann, A. Szczurek // Physical Review D. – 2017. – Vol. 96. – P. 094029.

24. *Charge form-factor of* $\pi^{\pm}-$ *and* $K^{\pm}-$ *mesons* / F. Cardarelli, I.L. Grach, I.M. Narodetsky, E. Pace, G. Salme, S. Simula // Phys. Rev. D. – 1996. – Vol. 53. – P. 6682–6685.

25. *Caprini*, *I.* Testing the consistency of the $\omega-\pi$ transition form factor with unitarity and analyticity / I. Caprini // Phys. Rev. D. – 2015. – Vol. 92. – P. 014014.

26. *A Global fit to determine the pseudoscalar mixing angle and the gluonium content of the eta-prime meson* / F. Ambrosino [et al.] (Kloe Collaboration) // JHEP. – 2009. – Vol. 7. – 105 p.

27. *Haurysh*, *V.Yu.* Pionic decay of $\rho-$ meson in relativistic quantum mechanics // V.Yu. Haurysh, V.V. Andreev // Nonlinear Phenomena in Complex System. – 2024. – Vol. 27 (4). – P. 372–379.

Поступила в редакцию 26.03.2025.

Информация об авторах

Андреев Виктор Васильевич – д.ф.-м.н., профессор
Гавриш Вадим Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент