

ВРАЩАЮЩИЕСЯ СКАЛЯРНЫЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ АРНО СО СЛОЖНЫМ АСТИГМАТИЗМОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ARNAUD'S ROTATING SCALAR GAUSSIAN BEAMS WITH COMPLEX ASTIGMATISM

S.S. Girkel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Исследованы решения параболического уравнения, описывающие скалярные параксиальные световые гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом. Уточнены допустимые значения свободных параметров, при которых такие пучки переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми. Предложены явные выражения, описывающие свойства эллиптического светового пятна, его деформацию и вращение по мере распространения. Выполнено графическое моделирование и проведен соответствующий анализ эллипсов интенсивности.

Ключевые слова: векторные пучки, гауссовы пучки, сложный астигматизм, квадратичная интегрируемость, вращающиеся пучки.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Вращающиеся скалярные гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 22–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_22. – EDN: YHUDZG

Abstract. The solutions of the parabolic equation describing Arnaud's scalar paraxial light Gaussian beams with complex astigmatism are investigated. The admissible values of free parameters at which such beams carry finite power and are physically realizable have been specified. The explicit expressions describing the properties of an elliptical light spot, its deformation and rotation as it propagates are proposed. The graphical modeling and the corresponding analysis of intensity ellipses are performed.

Keywords: vector beams, Gaussian beams, complex astigmatism, quadratic integrability, rotating beams.

For citation: Girkel, S.S. Arnaud's rotating scalar Gaussian beams with complex astigmatism / S.S. Girkel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 22–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_22 (in Russian). – EDN: YHUDZG

Введение

Обычно применяются лазерные гауссовы световые пучки с простейшей геометрией, которые обладают круговой симметрией относительно оси пучка z [1]. Пучки с общим астигматизмом изучены значительно меньше [2]–[6]. Данная работа представляет собой развитие предыдущих работ автора [7]–[13], где исследовались энергетические и поляризационные свойства различных типов световых пучков. В настоящей работе разработанный математический формализм распространяется на вращающиеся скалярные гауссовы световые пучки Арно со сложным астигматизмом.

Сначала описывается общий формализм для описания вращающихся скалярных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом (пучков Арно). Предложен упрощенный формализм для описания геометрических характеристик светового пятна скалярного пучка Арно в его поперечном сечении.

Уточнены ограничения, налагаемые на свободные параметры гауссова пучка Арно, чтобы гауссиан пучка был квадратично интегрируем (КИ). Тогда пучок переносит конечную мощность и, тем самым, является физически реализуемым. Установлены закономерности изменения эллиптичности светового пятна и его вращения по мере распространения пучка в пространстве. В разделе 2 проводится графическое моделирование геометрических характеристик эллипсов интенсивности скалярных гауссовых пучков Арно и формулируются некоторые закономерности. В заключении кратко сформулированы основные полученные результаты.

1 Скалярные гауссовы световые пучки Арно со сложным астигматизмом и свойства эллиптического светового пятна

Скалярное параболическое уравнение

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy} + 2ik\partial_z)f = 0$$

имеет решение в виде [2], [5] $f = G_0$, где

$$G_0 = \sqrt{\frac{q_{0x}q_{0y}}{q_xq_y}} \exp\left(\frac{ik}{2}\left(\frac{x^2}{q_x} + \frac{y^2}{q_y}\right)\right) \quad (1.1)$$

– гауссиан с простым астигматизмом, включающий два комплексных параметра пучка q_x и q_y .

Здесь $q_{x,y} = z - q_{0x,0y}$, $q_{0x,0y} = q'_{0x,0y} + iq''_{0x,0y}$, $i = \sqrt{-1}$. Таким образом, скалярный обобщенный пучок Гаусса с простым астигматизмом в общем случае зависит от переменных (x, y, z) и двух комплексных свободных параметров q_{0x}, q_{0y} .

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная интегрируемость (КИ) функции f . Необходимые и достаточные условия КИ мод Гаусса – $\{q''_{0x} > 0, q''_{0y} > 0\}$. При этом во всех случаях комплексные параметры $\{q'_{0x}, q'_{0y}\}$ не влияют на КИ.

Используем обозначения Арно [2]:

$$q_{x,y}^{-1} = \rho_{1,2} + i\omega_{1,2},$$

где

$$\rho_{1,2} = \frac{z - q'_{0x,0y}}{|q_{x,y}|^2} = \frac{z - q'_{0x,0y}}{(z - q'_{0x,0y})^2 + (q''_{0x,0y})^2};$$

$$\omega_{1,2} = \frac{q''_{0x,0y}}{|q_{x,y}|^2}.$$

Матрица гауссиана G_0 с простым астигматизмом является диагональной:

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} \rho_1 + i\omega_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 + i\omega_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь условия КИ мод Гаусса (1.1) можно представить также в виде – $\{\omega_1 > 0, \omega_2 > 0\}$.

Чтобы получить гауссиан со сложным астигматизмом из гауссиана G_0 с простым астигматизмом, следуя подходу Арно [2], повернем систему координат вокруг оси oz на некоторый мнимый угол $\psi = i\alpha$. После этого гауссиан приобретает сложный астигматизм и принимает вид:

$$G_A = \sqrt{\frac{q_{0x}q_{0y}}{q_xq_y}} \exp\left(\frac{ik}{2}(\mathbf{r}_\perp \Gamma \mathbf{r}_\perp)\right), \quad (1.2)$$

где поперечный радиус-вектор $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$. После этого матрица $\Gamma = \Gamma' + i\Gamma''$ гауссиана G_A со сложным астигматизмом по сравнению с первоначальной матрицей Γ_0 существенно усложняется. Вещественная часть матрицы Γ :

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \Gamma'_{11}; \Gamma'_{12} \\ \Gamma'_{12}; \Gamma'_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\Gamma'_{11,22} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \pm ch2\alpha \frac{\rho_1 - \rho_2}{2};$$

$$A'_{12} = -sh2\alpha \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Мнимая часть матрицы Γ :

$$\Gamma'' = \begin{pmatrix} \Gamma''_{11}; \Gamma''_{12} \\ \Gamma''_{12}; \Gamma''_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\Gamma''_{11,22} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm ch2\alpha \frac{\omega_1 - \omega_2}{2};$$

$$\Gamma''_{12} = sh2\alpha \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}.$$

Пучки, характеризуемые таким гауссианом G_A со сложным астигматизмом, будем называть пучками Арно [2]. Заметим, что гауссовы пучки Арно (1.2) со сложным астигматизмом, описываемые гауссианом G_A , не эквивалентны гауссовым пучкам со сложным астигматизмом, которые обсуждались нами ранее в [13], так как гауссиан Арно (1.2) отличен от гауссиана со сложным астигматизмом в [13].

Интенсивность скалярного светового пучка Арно со сложным астигматизмом пропорциональна плотности энергии светового поля пучка

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |G|^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left| \frac{q_x(0) q_y(0)}{q_x(z) q_y(z)} \right| \exp(-2k \mathbf{r}_\perp \Gamma'' \mathbf{r}_\perp),$$

где

$$\exp(-2k \mathbf{r}_\perp \Gamma'' \mathbf{r}_\perp) = \exp\left(-k \left(\frac{(x^2 + y^2)(\omega_1 + \omega_2)}{2} + \frac{(x^2 - y^2)(\omega_1 - \omega_2)}{2} ch2\alpha + 2xy sh(2\alpha) \cdot (\rho_2 - \rho_1) \right)\right).$$

Чтобы пучок был достаточно ограниченным в поперечных направлениях, гауссиан G_A со сложным астигматизмом должен быть КИ. Это означает, что матрица Γ'' должна быть положительно определенной. Отсюда следует, что на угол α , содержащийся в компонентах матрицы Γ'' , накладываются ограничения

$$sh^2 2\alpha < \frac{4\omega_1\omega_2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2}$$

или

$$ch^2 2\alpha < \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2},$$

откуда

$$ch2\alpha < \left| \frac{q_x - q_y^*}{q_x - q_y} \right|. \quad (1.3)$$

Заметим, что в статье Арно [2] и последующей работе [6] сформулированы более мягкие условия $ch2\alpha \leq \left| \frac{q_x - q_y^*}{q_x - q_y} \right|$, чтобы оси эллипса ин-

тенсивности были вещественными. Однако знак равенства здесь означает, что меньшая ось полуоси эллипса интенсивности может обращаться в нуль. Но тогда в направлении этой полуоси

интенсивность пучка не будет убывать с удалением от оси пучка z . Общая интенсивность такого пучка будет тогда бесконечной, что физически неприемлемо.

Итак, условия КИ и, тем самым, физической реализуемости скалярных вращающихся гауссовых пучков Арно должны описываться строгим неравенством (1.3).

После некоторых преобразований можно получить, что $sh2\alpha < sh2\alpha_{\max}$, где

$$sh2\alpha_{\max} = \frac{2\sqrt{q''_{0x}q''_{0y}}}{|q_x - q_y|}. \quad (1.4)$$

Теперь полные условия КИ гауссиана G_A и, тем самым, физической реализуемости скалярного гауссового пучка Арно со сложным астигматизмом можно представить в следующей простой форме:

$$\left\{ q''_{0x} > 0, q''_{0y} > 0, sh2\alpha = c \cdot \frac{2\sqrt{q''_{0x}q''_{0y}}}{|q_x - q_y|}, 0 \leq c < 1 \right\}. \quad (1.5)$$

Существенно, что условия КИ не зависят от расстояния z вдоль оси oz и $\rho_{1,2}$.

В поперечном сечении общеастигматического гауссового пучка в общем случае будет наблюдаться световое пятно эллиптической формы. При распространении в свободном пространстве это световое пятно будет деформироваться и вращаться [2].

Перейдем к анализу эллиптичности и азимута эллипса интенсивности. Собственные значения матрицы Γ'' равны

$$\Gamma''_{1,2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + sh^2 2\alpha \left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\right)^2 \right)}.$$

С учетом (1.3) и (1.4) последнее выражение можно представить в более простом виде

$$\Gamma''_{1,2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + c^2 \omega_1 \omega_2}.$$

Таким образом, собственные значения матрицы Γ'' не зависят от (ρ_1, ρ_2) !

Поскольку $\Gamma''_{1,2} = \frac{\lambda}{\pi w_{1,2}^2}$, где $w_{1,2}$ – главные

полуоси эллипсов интенсивности, то отношение полуосей эллипса интенсивности

$$\gamma = tg\chi = \frac{w_2}{w_1} = \sqrt{\frac{\Gamma''_1}{\Gamma''_2}}.$$

Удобно вместо $tg\chi$ использовать параметр эллиптичности

$$\sin(2\chi) = \frac{\sqrt{4\omega_1\omega_2(1-c^2)}}{\omega_1 + \omega_2}.$$

При $c = 0$ имеем гауссов пучок с простым астигматизмом. При этом $\sin(2\chi_0) = \frac{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1 + \omega_2}$.

Поэтому

$$\sin(2\chi) = \sin(2\chi_0)\sqrt{1-c^2}. \quad (1.6)$$

Параметры χ и χ_0 не зависят от ρ_1 и ρ_2 .

Когда эллипс интенсивности вырождается в линию? Лишь при $c = 1$. Но тогда нет КИ и пучок физически не реализуем! Когда эллипс превращается в окружность? Лишь при $c = 0$ и расстояниях

$$z_{крыв} = \frac{q'_{0x}\sqrt{q''_{0y}} \pm q'_{0y}\sqrt{q''_{0x}}}{\sqrt{q''_{0y}} \pm \sqrt{q''_{0x}}}.$$

Перейдем к анализу ориентации эллиптического светового пятна относительно оси ox . При повороте системы координат на мнимый угол $(i\alpha)$ происходит деформация эллипса интенсивности и новый азимут главной полуоси эллипса интенсивности определяется выражением

$$tg2\psi = \frac{2A''_{12}}{A''_{11} - A''_{22}}, \text{ т. е. } tg2\psi = th2\alpha \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Расчеты удобно производить в следующей последовательности:

$$q_{ox,oy} = q'_{ox,oy} + iq''_{ox,oy}; \quad \rho_{1,2} = \frac{z - q'_{0x,0y}}{|q_{x,y}|^2};$$

$$\omega_{1,2} = \frac{q''_{0x,0y}}{|q_{x,y}|^2}; \quad sh2\alpha = c \cdot sh2\alpha_{\max};$$

$$sh2\alpha_{\max} = 2\sqrt{\frac{q''_{0x}q''_{0y}}{(q'_{0y} - q'_{0x})^2 + (q''_{0y} - q''_{0x})^2}};$$

$$\sin(2\chi) = \frac{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1 + \omega_2} \sqrt{1-c^2}.$$

Ориентацию (азимут) главной оси эллипса интенсивности светового пятна целесообразно считать по формуле

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctg((\omega_1 - \omega_2) ch\alpha, (\rho_1 - \rho_2) sh\alpha). \quad (1.7)$$

2 Графическое моделирование характеристик эллипсов интенсивности скалярных гауссовых пучков Арно

Для графического моделирования полученных результатов для наглядности был выполнен переход к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Y = y/x_0, \quad Z = z/z_0,$$

где $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно. Чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков Арно и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались

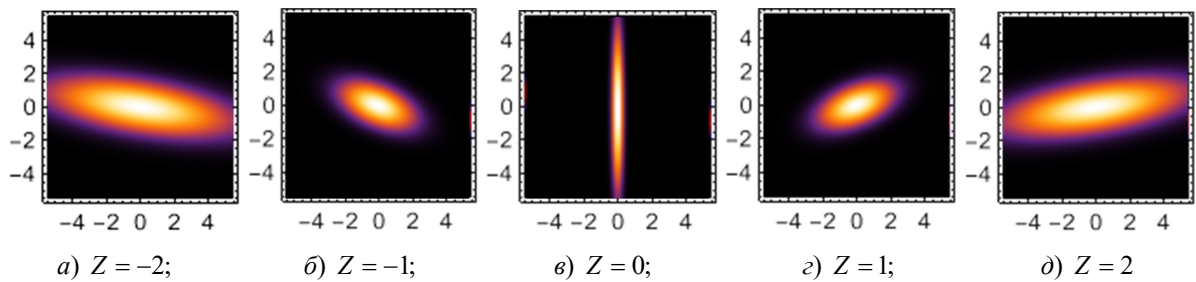


Рисунок 2.1 – Деформация и вращение эллипсов интенсивности скалярных гауссовых пучков Арно со сложным астигматизмом. Свободные параметры: $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 0,2$; $q''_{0y} = 2$; $c = 0,5$

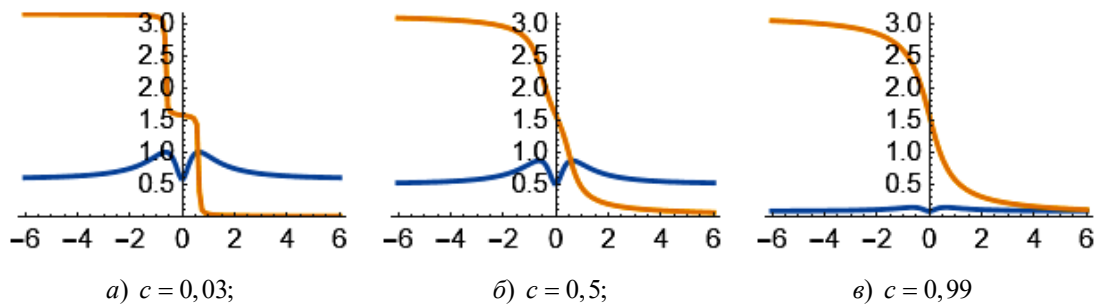


Рисунок 2.2 – Азимут ориентации главной оси эллипса интенсивности относительно оси ox и параметр эллиптичности светового пятна пучков Арно в зависимости от расстояния Z .

Свободные параметры: $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 0,2$; $q''_{0y} = 2$

параметры, удовлетворяющие условиям (1.5). Некоторые результаты графического моделирования поперечных потоков энергии и интенсивности однородно поляризованного параксиального светового гауссова пучка с общим астигматизмом изображены в относительных единицах на рисунках 2.1, 2.2 при различных значениях свободных параметров.

На рисунках 2.1 и 2.2 изображены параметр эллиптичности пятна интенсивности $\sin(2\chi)$ (нижний график) и его азимут ориентации ψ относительно оси ox в зависимости от расстояния Z . При распространении гауссового пучка Арно со сложным астигматизмом световое пятно пучка непрерывно деформируется и вращается. В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главные оси эллипса интенсивности вращаются на π радиан (см. также [2]). Вращение происходит неравномерно. Практически основной поворот происходит в интервале $(-2 > Z > 2)$ (рисунки 2.1, 2.2). Скорость поворота эллипса интенсивности зависит от свободного параметра c . При $c = 0$ (гауссиан с простым астигматизмом) азимут главной оси эллипса интенсивности не зависит от Z . Эллипс лишь скачком поворачивается на $\pi/2$ при строго круговой форме светового пятна при двух значениях Z . При $c > 0$ поворот эллипса светового пятна становится непрерывным, но неравномерным. С возрастанием Z поворот становится

все более плавным. При $c = 0,99$ мы видим наиболее плавное вращение эллипса с возрастанием Z . При этом эллиптичность падает до минимальных значений.

Графики параметра эллиптичности $\sin(2\chi)$, независимо от значений свободных параметров, имеют характерный вид. Они содержат один минимум и два максимума. Минимальный параметр эллиптичности $\sin(2\chi)$ (наиболее сплюснутое пятно интенсивности) наблюдается при азимуте эллипса интенсивности $\psi = \pi/2$. Затем, с изменением расстояния Z , эллиптичность быстро возрастает до максимума, а потом медленно уменьшается. Естественно, что при удалении от начала координат ($Z = 0$) размеры пятна интенсивности увеличиваются.

Коснемся теперь влияния других свободных параметров на форму и ориентацию эллипса интенсивности. Изменение $\Delta q'_{0x}$ параметра q'_{0x} приводит просто к соответствующему смещению $\Delta q'_{0x}$ светового пятна вдоль оси OZ . При возрастании q''_{0y} пятно расширяется вдоль оси абсцисс и деформируется вдоль оси ординат.

Заключение

В настоящей работе исследованы свойства эллиптического пятна интенсивности скалярных гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом. Предложены упрощенные явные

выражения для геометрических характеристик эллипса интенсивности (его эллиптичности и азимута ориентации относительно оси OZ). Уточнены ограничения, налагаемые на свободные параметры пучка Арно, чтобы он переносил конечную мощность и, тем самым, был физически реализуем.

Выполнено графическое моделирование характеристик эллипсов интенсивности скалярных гауссовых пучков Арно. Установлено полное соответствие аналитических выражений для деформации светового пятна и вращения его главных осей при распространении исследуемого светового пучка в свободном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. *Arnaud, J.* Gaussian beams with general astigmatism / J. Arnaud, H. Kogelnik // *Applied Optics*. – 1969. – Vol. 25. – P. 2908–2911.
3. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.
4. *Heyman, H.* Gaussian beam and pulsed beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics / E. Heyman, L.B. Felsen // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2001. – Vol. 18. – P. 1588–1611.
5. *Абрамочкин, Е.Г.* Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.
6. *Modeling of the general astigmatic Gaussian beam and its propagation through 3D optical systems* / E. Kochkina E. [et al.] // *Applied Optics*. – 2013. – Vol. 42, № 24. – P. 6030–6040.
7. *Гиргель, С.С.* Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.

8. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.

9. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.

10. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.

11. *Гиргель, С.С.* Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бесель-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.

12. *Гиргель, С.С.* Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков с простым астигматизмом / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2024. – № 4 (61). – С. 19–24.

13. *Гиргель, С.С.* Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2025. – № 1 (62). – С. 14–19.

Поступила в редакцию 10.12.2024.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор