**ФИЗИКА**

УДК 539.12.01 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_27
EDN: VANBVZ

# ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ КУЛОНА В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ *S*-СОСТОЯНИЙ С НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИЕЙ

**Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай**

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

# EXACT SOLUTION OF THE QUASIPOTENTIAL EQUATION WITH THE COULOMB POTENTIAL IN THE MOMENTUM REPRESENTATION FOR COUPLED *S*-STATES WITH ENERGY EQUAL TO ZERO

**Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai**

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Найдены точные решения трёхмерного модифицированного уравнения Кадышевского в импульсном представлении, описывающего связанные *s*-состояния системы двух скалярных частиц в случае потенциала Кулона в пределе равной нулю энергии. Решение задачи получено путём её преобразования к аналогу уравнения Шрёдингера с потенциалом Кулона в импульсном представлении, дополненного граничными условиями специального вида. Получены волновые функции и условия квантования, налагаемые на константу связи.

**Ключевые слова:** *модифицированное уравнение Кадышевского*, *потенциал Кулона*, *импульсное представление*, *уравнение Шрёдингера.*

**Для цитирования:** *Гришечкин, Ю.А.* Точное решение квазипотенциального уравнения с потенциалом Кулона в импульсном представлении для связанных *s*-состояний с нулевой энергией / Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 27–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_27. – EDN: VANBVZ

**Abstract.** Exact solutions of the three-dimensional modified Kadyshevsky equation in the momentum representation, describing the bound *s*-states of a system of two scalar particles in the case of the Coulomb potential in the limit of zero energy, are found. The solution of the problem is obtained by transforming it to an analogue of the Schrödinger equation with the Coulomb potential in the momentum representation, supplemented by boundary conditions of the special type. The wave functions and quantization conditions imposed on the coupling constant are obtained.

**Keywords:** *modified Kadyshevsky equation*, *Coulomb potential, momentum representation*, *Schrödinger equation.*

**For citation:** *Grishechkin*, *Yu.A*. Exact solution of the quasipotential equation with the Coulomb potential in the momentum representation for coupled *s*-states with energy equal to zero / Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 27–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_27 (in Russian). – EDN: VANBVZ

## Введение

Модифицированное уравнение Кадышевского для волновой функции $\psi(2E,\chi_p)$ в импульсном представлении, описывающей связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы $m$ в сферически-симметричном случае, имеет вид [1], [2]

$$\left(2m\operatorname{ch}\chi_p-2E\right)\psi(2E,\chi_p)= \\ =-\frac{2m}{\pi}\int_0^{+\infty}V(\chi_p,\chi_k)\psi(2E,\chi_k)d\chi_k,\ \ \chi_p\geq 0, \tag{0.1}$$

где величина $2E$ – энергия системы двух частиц в системе центра масс $(0<2E<2m)$, $\chi_p$ – быстрота, связанная с относительным импульсом $p$ в системе центра масс по формуле $p=m\operatorname{sh}\chi_p$, $V(\chi_p,\chi_k)$ – потенциал.

В данной работе мы рассматриваем нахождение точных решений уравнения (0.1) в случае, когда энергия системы равна нулю (предел сильно связанных частиц), а взаимодействие между частицами осуществляется посредством потенциала Кулона [3]

$$V(\chi_p,\chi_k)=\frac{\lambda}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{sh}\chi_p-\operatorname{sh}\chi_k}{\operatorname{sh}\chi_p+\operatorname{sh}\chi_k}\right|= \\ =-\frac{\lambda}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{cth}^2\left((\chi_p-\chi_k)/2\right)}{\operatorname{cth}^2\left((\chi_p+\chi_k)/2\right)}\right|, \tag{0.2}$$

где $\lambda>0$ – константа связи. Для решения поставленной задачи нам понадобится свойство нечётности волновой функции

$$\psi(2E,-\chi_p)=-\psi(2E,\chi_p), \tag{0.3}$$

а также граничные условия

$$\psi(2E,0)=0;$$

$$\left(2\operatorname{ch}\chi_p-2E/m\right)\psi(2E,\chi_p)\Big|_{\chi_p\to\infty}\cong 0. \quad (0.4)$$

Выражения (0.3), (0.4) следуют из уравнения (0.1), при этом (0.3) получено в предположении, что область определения переменной $\chi_p$ распространена на отрицательную полуось.

### 1 Преобразование уравнения

Воспользовавшись свойством (0.3) волновой функции, преобразуем уравнение (0.1) с потенциалом (0.2) к виду

$$\left(2\operatorname{ch}\chi_p-2E/m\right)\psi(2E,\chi_p)=$$
$$=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left|\frac{\operatorname{sh}\chi_p-\operatorname{sh}\chi_k}{\operatorname{sh}\chi_p+\operatorname{sh}\chi_k}\right|\psi(2E,\chi_k)d\chi_k,$$
$$-\infty<\chi_p<\infty$$

и выполним в нём замену переменных

$$z=\exp(\chi_p),\quad z'=\exp(\chi_k).$$

В результате получим следующее интегральное уравнение

$$\left(z+1/z-2E/m\right)\tilde\psi(2E,z)=$$
$$=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\tilde\psi(2E,z')\frac{dz'}{z'}- \quad (1.1)$$
$$-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z+1/z'}{z-1/z'}\right|\tilde\psi(2E,z')\frac{dz'}{z'},\quad z\ge 0,$$

где выполнено переобозначение для волновой функции

$$\psi(2E,\chi_p)=\psi(2E,\ln z)=\tilde\psi(2E,z). \quad (1.2)$$

Выполним теперь во втором интеграле уравнения (1.1) замену переменной $z''=1/z'$ и, используя формулы (0.3), (1.2), преобразуем функцию под интегралом

$$\tilde\psi(2E,z')=\tilde\psi(2E,1/z'')=\psi\left(2E,\ln\left(1/z''\right)\right)=$$
$$=\psi(2E,-\ln z'')=-\psi(2E,\ln z'')=-\tilde\psi(2E,z''),$$

После указанных действий уравнение (1.1) принимает вид

$$\left(z+1/z-2E/m\right)\tilde\psi(2E,z)=$$
$$=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\tilde\psi(2E,z')\frac{dz'}{z'}- \quad (1.3)$$
$$-\frac{\lambda}{2\pi}\int_{+\infty}^{0}\ln\left|\frac{z+z''}{z-z''}\right|\tilde\psi(2E,z'')\frac{dz''}{z''}.$$

Выполним в (1.3) переобозначение переменной $z''\to z'$ и представим уравнение в следующей форме

$$\left(z+1/z-2E/m\right)\tilde\psi(2E,z)=$$
$$=-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\tilde\psi(2E,z')\frac{dz'}{z'}. \quad (1.4)$$

Введём обозначение $\varphi(2E,z)=\tilde\psi(2E,z)/z$. В результате уравнение (1.4) принимает вид

$$\left(z^2+1-2E/m\,z\right)\varphi(2E,z)=$$
$$=-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\varphi(2E,z')dz'. \quad (1.5)$$

Точное решение интегрального уравнения (1.5) для произвольного значения энергии $2E$ нам неизвестно. Рассмотрим (1.5) в частном случае, когда $2E=0$.

### 2 Точное решение интегрального уравнения

При нулевом значении энергии уравнение (1.5) принимает форму

$$\left(z^2+1\right)\varphi(0,z)=-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\varphi(0,z')dz', \quad (2.1)$$
$$z\ge 0,$$

аналогичную уравнению Шрёдингера для связанных состояний с потенциалом Кулона в импульсном представлении [4]. Граничные условия (0.4) для функции $\varphi(0,z)$ принимают вид

$$\varphi(0,1)=0;$$
$$\left(z^2+1\right)\varphi(0,z)\Big|_{z\to\infty}\cong 0. \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) представим в форме [5]

$$\varphi(0,z)=\frac{C}{z^2+1}\left[\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\lambda/2}-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\lambda/2}\right], \quad (2.3)$$
$$\lambda=2s,\quad s=1,2,...,$$

где константа $C$ – всё ещё не определена. Функция (2.3) удовлетворяет второму из условий (2.2) для всех указанных значений $s$. Подставив (2.3) в первое из условий (2.2) и выполнив несложные преобразования, получим равенство

$$\sin\left(\pi s/2\right)=0,$$

которое выполняется лишь для чётных значений $s$. Таким образом, решение уравнения (2.1) с учётом граничных условий (2.2) имеет следующий вид:

$$\varphi_n(0,z)=\frac{C_n}{z^2+1}\left[\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n}-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n}\right],$$
$$\lambda_n=4n,\quad n=1,2,....$$

Возвращаясь к первоначальному обозначению для волновой функции и переменной $\chi_p$, представим решение уравнения (0.1) с потенциалом (0.2) для нулевой энергии связанного состояния в форме

$$\psi_n(0,\chi_p)=\frac{C_n\exp(i\pi n)}{2\operatorname{ch}\chi_p}\times \quad (2.4)$$
$$\times\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\chi_p/2-i\pi/4\right)}{\operatorname{sh}\left(\chi_p/2+i\pi/4\right)}\right)^{2n}-\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\chi_p/2+i\pi/4\right)}{\operatorname{sh}\left(\chi_p/2-i\pi/4\right)}\right)^{2n}\right],$$
$$\lambda_n=4n,\quad n=1,2,....$$

**Заключение**

В данной работе получены точные решения модифицированного уравнения Кадышевского с потенциалом Кулона в импульсном представлении в случае связанных *s*-состояний системы двух скалярных частиц с энергией, равной нулю. Рассмотренный метод мы планируем использовать в дальнейшем для получения аналитических решений релятивистских двухчастичных уравнений в случае ненулевых значений энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

2. *Kapshai, V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

3. *Капшай*, *В.Н.* Точное решение ковариантного двухчастичного одновременного уравнения с суперпозицией квазипотенциалов однобозонного обмена / В.Н. Капшай, Н.Б. Скачков // ТМФ. – 1982. – Т. 53, № 1. – С. 32–42.

4. *Флюгге*, *З.* Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3-е изд. – Москва: ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.

5. *Palma*, *G.* The one-dimensional hydrogen atom revisited / G. Palma, U. Raff // Canadian Journal of Physics. – 2006. – Vol. 84, № 9. – P. 787–800.

*Поступила в редакцию* 27.02.2025.

**Информация об авторах**
*Гришечкин Юрий Алексеевич* – к.ф.-м.н., доцент
*Капшай Валерий Николаевич* – к.ф.-м.н., доцент