

УДК 536.782:524.882

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_30

EDN: VYPBIO

ДЖОУЛЬ – ТОМСОНОВСКОЕ РАСШИРЕНИЕ: ЖИДКОСТЬ РЕДЛИХА – КВОНГА И ЗАРЯЖЕННАЯ АДС ЧЁРНАЯ ДЫРА

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

JOULE – THOMSON EXPANSION: REDLICH – KWONG FLUID AND CHARGED AdS BLACK HOLE

V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе рассмотрено джоуль-томсоновское расширение жидкости Редлиха – Квонга и заряженной АдС черной дыры. На основе уравнений состояния получены аналитические выражения для температур инверсии, построены инверсионные кривые в TP -плоскости и определены области охлаждения и нагрева. Проанализированы сходства и различия поведения заряженной АдС черной дыры и жидкости Редлиха – Квонга в данном процессе.

Ключевые слова: жидкость Редлиха – Квонга, заряженная АдС чёрная дыра, расширение Джоуля – Томсона, изохнтальпический процесс, кривая инверсии, области охлаждения и нагревания.

Для цитирования: Новикова, О.В. Джоуль – Томсоновское расширение: жидкость Редлиха – Квонга и заряженная АдС чёрная дыра / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 30–34. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_30. – EDN: VYPBIO

Abstract. In the paper we consider the Joule – Thomson expansion of the Redlich – Kwong fluid and a charged AdS black hole. Based on the equations of state, the analytical expressions for inversion temperatures are obtained, the inversion curves in the TP -plane are constructed, and the cooling and heating regions are determined. Similarities and differences in the behavior of a charged AdS black hole and the Redlich – Kwong fluid in this process are analyzed.

Keywords: Redlich – Kwong fluid, charged AdS black hole, Joule – Thomson expansion, isenthalpic process, inversion curve, cooling and heating regions.

For citation: Novikava, V.U. Joule – Thomson expansion: Redlich – kwong fluid and charged AdS black hole / V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 30–34. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_30 (in Russian). – EDN: VYPBIO

Введение

Начало термодинамике чёрных дыр было положено в классических работах Бекенштейна и Хокинга [1], [2]. Термодинамическое изучение чёрных дыр в пространстве анти-де-Ситтера (АдС), начатое в пионерской работе Хокинга и Пэйджа [3], было обобщено на случай наличия электрического заряда в работе [4], где авторы обнаружили аналогию между фазовыми диаграммами чёрных дыр и ван-дер-ваальсовской жидкости. Поэтому в последнее десятилетие делается акцент на возможность проведения сравнительного анализа поведения чёрных дыр и реальных жидкостей [5] в рамках процесса Джоуля – Томсона [6]. В данной работе мы изучим и сравним джоуль-томсоновское расширение заряженной АдС чёрной дыры и жидкости Редлиха – Квонга, причём, начнём с последней.

Следует заметить, что сравнительный анализ поведения инверсионных кривых эффекта Джоуля – Томсона для полуэмпирических двухпараметрических уравнений состояния,

проделанный в работе [7], говорит о том, что именно редлих-квонговская кривая ближе всех к эмпирической кривой, которая следует из классического эксперимента [8].

1 Жидкость Редлиха – Квонга

Стандартное уравнение состояния Редлиха – Квонга, например [7], может быть записано в виде

$$P = \frac{k_B T}{\vartheta - b} - \frac{a}{\sqrt{T} \vartheta (\vartheta + b)} \quad (1.1)$$

при условии введения параметра $\vartheta = V / N$, где V – объём, N – постоянное число частиц, P – давление, T – температура, k_B – постоянная Больцмана, а параметры сил парного межмолекулярного отталкивания и притяжения заданы заменами $b \Rightarrow b / N$, $a \Rightarrow a / N^2$.

В процессе Джоуля – Томсона жидкость изохнтальпически, то есть при энтальпии $H = \text{Const}$, из области высокого давления

переходит в область более низкого давления, что сопровождается изменением её температуры. При понижении температуры (охлаждении) эффект Джоуля – Томсона считается положительным, при повышении температуры (нагревании) – отрицательным. Производная, характеризующая процесс, представима в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = -\frac{\lambda}{c_p} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial P}\right)_T, \quad \lambda = \vartheta \left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right)_T + T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\vartheta, \quad (1.2)$$

где параметр процесса λ имеет знак, совпадающий со знаком эффекта в данном случае дифференциального. Уравнение (1.1) и определение (1.2) дают явный вид параметра λ

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right)_T &= -\frac{k_B T}{(\vartheta - b)^2} + \frac{a}{\sqrt{T}} \frac{(2\vartheta + b)}{\vartheta^2 (\vartheta + b)^2}, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\vartheta &= \frac{k_B}{\vartheta - b} + \frac{a}{2T^{3/2} \vartheta (\vartheta + b)}, \\ \lambda &= -\frac{k_B T b}{(\vartheta - b)^2} + \frac{5a \vartheta + 3ab}{2\sqrt{T} \vartheta (\vartheta + b)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Области положительного и отрицательного эффекта Джоуля – Томсона разделяются инверсионной кривой, удовлетворяющей условию $\lambda = 0$, при этом полагается, что $T = T_i$. Тогда из (1.3) следуют выражение для T_i , которое совместно с (1.1) определяет систему уравнений для построения кривой инверсии

$$\begin{cases} T_i = \left[\left(\frac{5a \vartheta + 3ab}{2k_B b \vartheta} \right) \left(\frac{\vartheta - b}{\vartheta + b} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}}; \\ P = \frac{k_B T_i}{\vartheta - b} - \frac{a}{\sqrt{T_i} \vartheta (\vartheta + b)}. \end{cases} \quad (1.4)$$

В свою очередь, формула (1.3) по очевидному асимптотическому поведению $\lambda_{T \rightarrow \infty} < 0$ позволяет выделить области положительного и отрицательного эффекта – охлаждения и нагревания соответственно, что позволяет не использовать явный вид графического поведения изотермальных кривых. Уравнения (1.4) также определяют физическую область некомплексных и неотрицательных температур в TP -плоскости. Вышесказанное, в случае фиксации параметров $a = b = k_B = 1$ по аналогии с [5], проиллюстрировано на рисунке 1.1.

Приведенная форма уравнения Редлиха – Квонга, учитывающая значения критических параметров

$$P_{cr} = \left(\frac{a^2 k_B \xi^7}{3b^5} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad T_{cr} = \left(\frac{3a \xi^2}{k_B b} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad V_{cr} = \frac{b}{\xi},$$

где $\xi = \sqrt[3]{2} - 1 \cong 0,259921 \cong 0,260$, ранее изучалась в рамках процесса Джоуля – Томсона

в вышеупомянутой работе [7]. В этом случае система уравнений для инверсионной кривой имеет вид:

$$\begin{cases} T_{i,r} = \left[\frac{(5V_r + 3\xi)}{6\xi^2 V_r} \left(\frac{V_r - \xi}{V_r + \xi} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}}; \\ P_r = \frac{3T_{i,r}}{V_r - \xi} - \frac{1}{\xi \sqrt{T_{i,r}} V_r (V_r + \xi)}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Приведенная кривая инверсии, следующая из (1.5), изображена на рисунке 1.2.

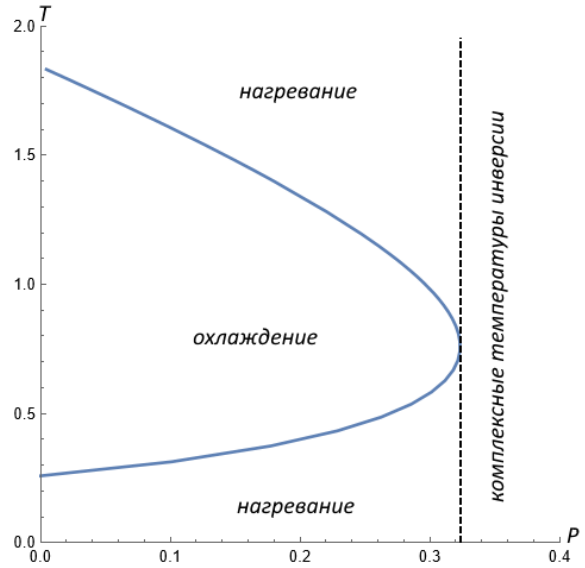


Рисунок 1.1 – Кривая инверсии знака эффекта Джоуля – Томсона, следующая из уравнения состояния Редлиха – Квонга ($a = b = k_B = 1$)

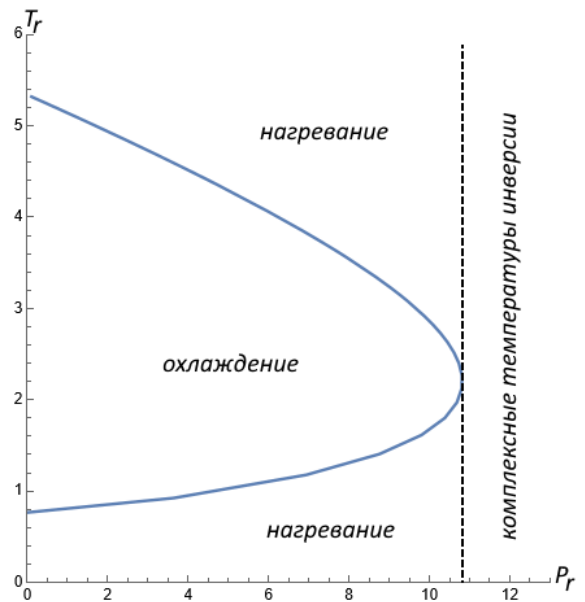


Рисунок 1.2 – Кривая инверсии знака эффекта Джоуля – Томсона для приведенного уравнения состояния Редлиха – Квонга

Критерий выделения областей нагревания и охлаждения и в этом случае тот же $\lambda_{r,T \rightarrow \infty} < 0$ и также не требует явного вида изохэнтальпических кривых.

2 Заряженная АдС чёрная дыра

Обратимся к заряженной АдС (анти-де-ситтеровской) чёрной дыре и коснёмся её основных физических и, в особенности, термодинамических свойств, а также определим характеристики джоуль-томсоновского расширения. При этом далее, что является общепринятым, будем использовать рациональную систему единиц, в которой $G = \hbar = k_B = c = 1$.

В рассматриваемом случае геометрия пространства-времени заключена в интервале

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$, а функция $f(r)$ представима как

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (2.1)$$

В формуле (2.1) l , M и Q – это анти-де-ситтеровские радиус, масса и заряд чёрной дыры. В свою очередь, радиус горизонта событий r_+ находится, как наибольший корень уравнения $f(r_+) = 0$.

При этом масса чёрной дыры оказывается равной

$$M = \frac{r_+}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2} \right) \quad (2.2)$$

и в нашем случае, в соответствии с работой [9], сопоставляется с энтальпией, дифференциал которой

$$dM = TdS + VdP + \Phi dQ, \quad \Phi = Q/r_+. \quad (2.3)$$

Космологическая константа Λ непосредственно связана с давлением P и в АдС случае она отрицательна [1], [3]

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2}. \quad (2.4)$$

Энтропия чёрной дыры [1] задаётся соотношением $S = \pi r_+^2$, а температура T , согласно (2.3), приобретает вид

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{P,Q} = \frac{l^2(r_+^2 - Q^2) + 3r_+^4}{4\pi l^2 r_+^3}. \quad (2.5)$$

И, наконец, уравнение состояния вида $P = P(V, T)$ для заряженной АдС чёрной дыры на основании (2.4) и (2.5) может быть записано как

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad r_+ = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.6)$$

Теперь обратимся непосредственно к джоуль-томсоновскому расширению заряженной АдС чёрной дыры. При этом определение параметра процесса λ используем в его стандартном виде [6].

Применение уравнения состояния (2.6) в определении (1.2) при условии инверсии $\lambda = 0$ даёт выражение для инверсионной температуры

$$T_i = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}} \left[8\pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} P_i + \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} - \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{Q^2}{V^{\frac{4}{3}}} \right] =$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi r_+^3} + \frac{1}{4\pi r_+} + 2P_i r_+. \quad (2.7)$$

Дальнейшее совместное использование (2.6) и (2.7) приводит к условию в виде уравнения

$$8\pi P_i r_+^4 + 2r_+^2 - 3Q^2 = 0,$$

имеющему только один положительный некомплексный корень из четырёх

$$r_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+24P_i\pi Q^2}}{P_i\pi} - \frac{1}{P_i\pi}}. \quad (2.8)$$

Используя корень (2.8) в выражении (2.7), получаем окончательный вид кривой инверсии в TP -плоскости

$$T_i = \frac{\sqrt{P_i} \left(1 + 16\pi P_i Q^2 - \sqrt{1+24P_i\pi Q^2} \right)}{\sqrt{2\pi} \left(-1 + \sqrt{1+24P_i\pi Q^2} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.9)$$

Соответствующее (2.9) семейство кривых инверсии изображено на рисунке 2.1

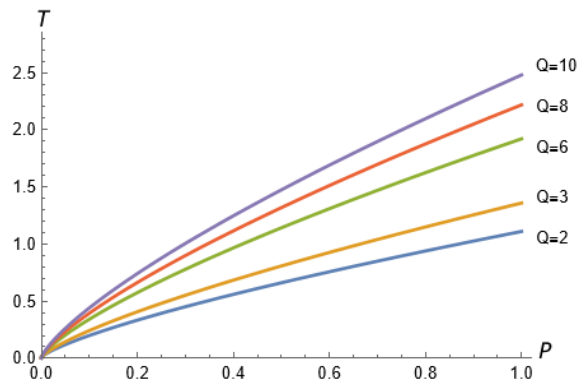


Рисунок 2.1 – Семейство кривых инверсии для заряженной АдС чёрной дыры, параметризованное зарядом Q

На рисунке 2.2. показаны области положительного и отрицательного эффекта для заряженной АдС чёрной дыры с фиксированным зарядом, в частном случае $Q = 2$. В качестве критерия выделения областей охлаждения и нагревания при этом было выбрано поведение изохэнтальпических кривых, следующее из формул (2.2), (2.4) и (2.5). Не трудно заметить, что с уменьшением P под кривой инверсии на изохэнтальпе температура T растёт, а над кривой инверсии – убывает.

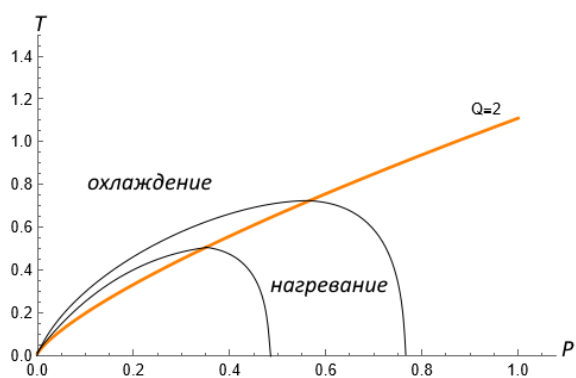


Рисунок 2.2 – Кривая инверсии для заряженной АдС чёрной дыры с зарядом $Q = 2$; области охлаждения и нагревания; явный вид изоэнтальп

3 Сравнение областей положительного эффекта

Понимая определённое фиксированное положение редлих-квонговской кривой инверсии в случае нормировки $a = b = k_B = 1$ и влияние параметризации зарядом на поведение кривых инверсии АдС чёрной дыры можно сделать вывод о наличии некоторого заряда, при котором кривые инверсии имеют точку касания A . Расчёты показывают, что данной ситуации соответствует заряд $Q = 2,75$. Координаты точки касания: $P_A = 0,28$; $T_A = 0,43$. Касающиеся кривые инверсии показаны на рисунке 3.1.

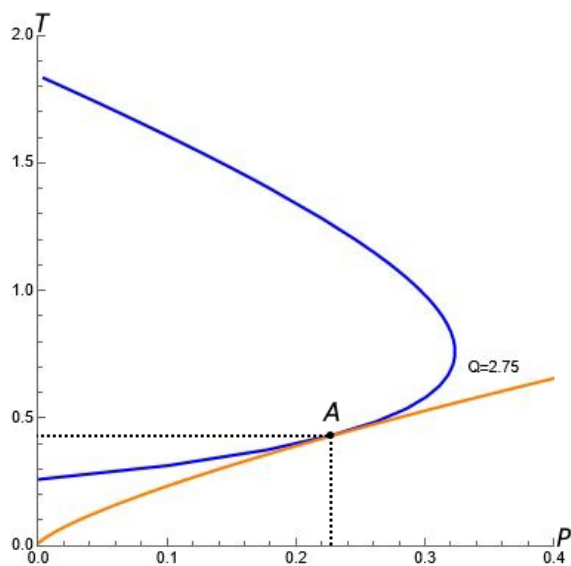


Рисунок 3.1 – Кривые инверсии для заряженной АдС чёрной дыры с зарядом $Q = 2,75$ и кривая инверсии Редлиха – Квонга

Поэтому в рамках выше оговоренной физической ситуации можно прийти к выводам:

- область положительного эффекта Джоуля – Томсона для заряженных АдС чёрных дыр с $Q < 2,75$ полностью содержит в себе такую же область для жидкости Редлиха – Квонга,

что может говорить о возможной физической общности состояния и поведения рассматриваемых систем в обозначенных инверсионными кривыми областях PT – плоскости;

- для заряженных АдС чёрных дыр с $Q \geq 2,75$ характерно смешивание областей с различными знаками эффекта Джоуля – Томсона, что уменьшает степень общности систем и возможность физических интерпретаций;

- наличие точки касания с нижней стороны редлих-квонговской кривой инверсии говорит о правомерности использования термина «жидкость Редлиха – Квонга», так как именно нижняя часть соответствует жидкой фазе.

Заключение

Изучено расширение Джоуля – Томсона, или же одноименный эффект, для жидкости Редлиха – Квонга и заряженной АдС черной дыры. Масса черной дыры в АдС пространстве отождествлялась с энтальпией и считалась постоянной. В обоих случаях получены кривые инверсии знака эффекта Джоуля – Томсона и определены области охлаждения и нагревания. Чёрные дыры всегда остывают выше кривой инверсии, что было показано для различных значений заряда Q и массы (энтальпии) M (рисунки 2.1, 2.2). Видно, что при низких температурах обе системы имеют различное поведение: у заряженной АдС чёрной дыры область охлаждения увеличивается с уменьшением заряда, а у жидкости Редлиха – Квонга уменьшается, аналогично с жидкостью ван-дер-Ваальса [5], и при определённой температуре исчезает. В свою очередь, наличие граничной температуры $T_A = 0,43$ даёт возможность говорить о физической общности состояний и поведения рассматриваемых систем в обозначенных инверсионными кривыми областях PT – плоскости.

Следует также в дальнейшем обратить внимание на физическое осмысление нормировки $a = b = 1$, то есть фиксацию параметров уравнения состояния, не относящихся к фундаментальным константам. В этом случае строгий анализ областей положительного эффекта сложно реализовать из-за возникновения различного масштабирования шкал.

Следующим шагом в исследовании джоуль-томсоновского расширения АдС чёрных дыр, очевидно, является обращение к керровским чёрным дырам [10], то есть незаряженным вращающимся, и проведение сравнительного анализа с соответствующим поведением двухпараметрических реальных жидкостей, в особенности, жидкости Редлиха – Квонга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bekenstein, J.D.* Black holes and the second law / J.D. Bekenstein // *Lett. Nuovo Cimento.* – 1972. – Vol. 4. – P. 737–740.

2. *Hawking, S.W.* Black hole explosions? / S.W. Hawking // *Nature*. – 1974. – Vol. 248. – P. 30–31.
3. *Hawking, S.W.* Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space / S.W. Hawking, D.N. Page // *Commun. Math. Phys.* – 1983. – Vol. 87. – P. 577–588.
4. *Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography* / A. Chamblin, R. Emparan, C.V. Johnson, R.C. Myers // *Phys. Rev. D*. – 1999. – Vol. 60. – P. 064018.
5. *Ökcü, Ö.* Joule – Thomson expansion of the charged AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydiner // *Eur. Phys. J. C*. – 2017. – Vol. 77. – Art. № 24.
6. *Румер, Ю.Б.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: НГУ, 2000. – 608 с.
7. *Дей, Е.А.* Расчет параметров изотермического охлаждения газов Редлиха – Квонга / Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. – 2012. – № 6 (75). – С. 38–42.
8. *Hendricks, R.C.* Joule – Thomson Inversion Curves and Related Coefficients for Several Simple Fluids / R.C. Hendricks, I.C. Peller, A.K. Baron // *NASA Technical Note TN D-6807*. – NASA, 1972. – 59 p.
9. *Kastor, D.* Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes / D. Kastor, S. Ray, J. Traschen // *Class. Quantum Gravity*. – 2009. – Vol. 26. – P. 195011.
10. *Ökcü, Ö.* Joule – Thomson expansion of Kerr-AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydiner // *Eur. Phys. J. C*. – 2018. – Vol. 78. – Art. № 123.

Поступила в редакцию 26.02.2025.

Информация об авторах

Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.
Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент