Известия Гомельского государственного университета
имени Ф Скорины, № 3 (150), 2025

Математика

УДК 512.542 EDN: NEBSIQ

О пересечении подгрупп близких к $\mathfrak{F}$-абнормальным

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, А.В. Бузланов, И.В. Близнец

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер максимальных A-допустимых подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал, с ограничениями на индексы. Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.

Ключевые слова: конечная группа, формация, $\mathfrak{F}$-корадикал, функтор.

The structure of a subgroup equal to the intersection of the kernels of maximal A-admissible subgroups not containing $\mathfrak{F}$-residual, with restrictions on indexes is studied. The properties of the corresponding generalized Frattini subgroup are established.

Keywords: finite group, formation, $\mathfrak{F}$-residual, functor.

Введение. В данной статье все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Одним из классических направлений в теории конечных групп является изучение свойств пересечений максимальных подгрупп и их влияния на подгрупповую и нормальную структуру группы. Ключевую роль в этих исследованиях играет подгруппа Фраттини, впервые введённая в работе [1].

Теорема Фраттини получила дальнейшее развитие в работах различных авторов. В частности, В. Гашюц [2] рассмотрел пересечение всех ненормальных максимальных подгрупп, а В. Дескинс [3] изучил пересечение максимальных подгрупп, индексы которых не делятся на заданное простое число. Другие важные результаты в этом направлении представлены в работах [4]–[6].

В 1960-х гг. развитие теории пересечений во многом было связано с достижениями в теории формаций. Использование её методов позволило систематизировать накопленные данные о максимальных подгруппах и получить новые значимые результаты. Важную роль сыграло введённое Р. Картером, Т. Хоуксом [7] и Л.А. Шеметковым [8] понятие $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы.

Настоящая работа развивает указанные направления в контексте групп с операторами, продолжая исследования, начатые в [9], [10].

2. Определения и обозначения. Подгруппа H группы G называется:

– пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$;

– абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют нормально наследственным (S_n-замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\phi}) \cap f(Ker\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G (значение f на любой неединичной p-группе обозначается $f(p)$).

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M.

Пусть $\mathfrak{X}$ произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [11] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть:

1) абнормально полным, если для любой группы G среди элементов множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G;

2) абнормальным, если $\theta(G) \setminus \{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных подгрупп;

3) тривиальным, если функтор θ выделяет в группе G все её подгруппы.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – группа автоморфизмов группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Поскольку операторы действуют на группу как автоморфизмы, то любая характеристическая подгруппа оказывается будет являться A-допустимой для произвольной группы операторов.

Отметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Обозначим через

$\overline{\Phi}_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \notin \mathfrak{F},\ M \in \theta(G),\ M - A\text{-допустимая подгруппа}\}$;

$\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \in \theta(G),\ M - A\text{-допустимая подгруппа}\}$;

$\Phi_{\theta_p}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \in \theta(G),\ M - A\text{-допустимая подгруппа}, |G:M|$ не делится на простое число p $\}$;

$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)=\cap\{M_G \mid M\in\theta(G),\ M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M$ – A-допустимая подгруппа, $|G:M|$ не делится на простое число p $\}$;

$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)=\cap\{M_G \mid M\in\theta(G),\ M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M\notin\mathfrak{F},\ M$ – A-допустимая подгруппа, $|G:M|$ не делится на простое число p $\}$;

Если в группе отсутствуют подгруппы с требуемыми свойствами, соответствующие пересечения по определению полагаются равными всей группе.

Важно подчеркнуть, что между обычными и операторно-допустимыми подгруппами существуют принципиальные различия: не всякая максимальная подгруппа является максимальной A-допустимой, и обратно, максимальная A-допустимая подгруппа не обязательно будет максимальной в обычном смысле [9].

3. Вспомогательные результаты.

Лемма 3.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A-допустимая θ-подгруппа группы G и $N\subseteq\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)$, то*

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G/N,A)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)/N.$$

Доказательство. Если $N\subseteq\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)$, то $N\subseteq M$, где M – любая максимальная A-допустимая θ-подгруппа из G, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, с индексом, не делящимся на простое число p. Тогда

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G/N,A)=\cap(M/N)_{G/N}$$

где M/N пробегает множество всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп, не содержащих $G^{\mathfrak{F}}N/N$ из G/N, с индексом, не делящимся на простое число p. Поэтому

$$\cap(M/N)_{G/N}=(\cap M_G)/N=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)/N$$

и утверждение леммы верно.

Лемма 3.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N\subseteq\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)$, то*

$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G/N,A)=\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)/N.$$

Доказательство. Если $N\subseteq\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)$, то $N\subseteq M$, где M – любая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не принадлежащая $\mathfrak{F}$ и не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, с индексом, не делящимся на простое число p. Тогда

$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G/N,A)=\cap(M/N)_{G/N},(1),$$

где M/N пробегает множество всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп из G/N, не принадлежащих $\mathfrak{F}$ и не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G/N.

Продолжим равенство (1):

$$\cap(M/N)_{G/N}=(\cap M_G)/N=\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)/N(2).$$

Из равенств (1) и (2) вытекает справедливость утверждения. Лемма доказана.

Теорема 3.3 [10]. *Пусть θ – абнормально полный подгрупповой функтор, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – ступенчатая формация. Тогда*

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)/\Phi_{\theta}(G,A)=Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G/\Phi_{\theta}(G,A)).$$

Теорема 3.4 [10]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – S_n*-замкнутая локальная формация,* θ – *абнормально полный подгрупповой функтор и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1.$ *Тогда* $\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)=A\times B,$ *где* $A\in\mathfrak{F},$ $B\subseteq\Phi_\theta(G,A),$ $\pi(B)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing.$

Теорема 3.5 [9]. *Пусть* θ – *абнормально полный подгрупповой функтор и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1.$ *Тогда*

$$\Phi_{\theta_p}(G,A)/O_p(G)=\Phi_\theta(G/O_p(G),A).$$

4. Основной результат.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *формация,* θ – *абнормально полный подгрупповой функтор, группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1,$ *тогда*

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G)=\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A).$$

Доказательство. Пусть $O_p(G)\neq 1.$ По теореме 3.5

$$\Phi_{\theta_p}(G,A)/O_p(G)=\Phi_\theta(G/O_p(G),A).$$

Тогда теорема для факторгруппы $G/O_p(G)$ верна по индукции. Следовательно,

$$\Phi_{\theta_p}(G/O_p(G),A)/O_p(G/O_p(G))=\Phi_\theta(G/O_p(G)/O_p(G/O_p(G)),A).$$

Так как $O_p(G/O_p(G))=1$ и на основании леммы 3.1

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A)=\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G),$$

то

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_p(G)=D_{\Phi_\theta}^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A).$$

Пусть теперь $O_p(G)=1.$ Тогда по теореме 3.5 $\Phi_{\theta_p}(G,A)/O_p(G)=\Phi_\theta(G/O_p(G),A).$ Значит,

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\Phi_{\theta_p}(G,A)=\Phi_\theta(G,A).$$

Пусть K/N – главный фактор группы $G,$ причём,

$$\Phi_\theta(G,A)\subseteq N\subseteq K\subseteq\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A).$$

Так как

$$K\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\Phi_\theta(G,A),$$

то

$$N=N(K\cap G^{\mathfrak{F}})=K\cap NG^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}\simeq K/K\cap NG^{\mathfrak{F}}=K/N(K\cap G^{\mathfrak{F}})=K/N.$$

Но $G/NG^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F},$ поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-центральным в $G.$ Следовательно, главный фактор K/N также является $\mathfrak{F}$-центральным в $G.$ Таким образом, $\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$ – $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G,A).$ Поэтому

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)\subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G,A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 3.3

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)\supseteq\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)=Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G,A)).$$

Значит,

$$\Phi_{\theta_p}^{\mathfrak{F}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)=Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G,A)).$$

Следовательно,

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)/\Phi_{\theta}(G,A)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)/\Phi_{\theta}(G,A),$$

то есть $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G,A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.1 с помощью теоремы 3.4 получаем следующее

Следствие 4.1.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* $\mathfrak{F}$ *– локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, тогда* $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)/O_p(G)\in\mathfrak{F}$.

Если θ – абнормальный подгрупповой функтор, то получаем

Следствиеа 4.1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, *тогда*

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G,A)/O_p(G)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_p(G),A).$$

В частности, если $\mathfrak{F}$ – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G,A)/O_p(G)\in\mathfrak{F}$.

Если θ – тривиальный подгрупповой функтор, то получаем

Следствиеа 4.1.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация и группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, *тогда*

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{p}(G,A)/O_p(G)=\Phi^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G),A).$$

В частности, если $\mathfrak{F}$ – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\Phi^{\mathfrak{F}}_{p}(G,A)/O_p(G)\in\mathfrak{F}$.

Если группа операторов тривиальна, то из теореммы 4.1 получаем

Следствие 4.1.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация,* θ *– абнормально полный подгрупповой функтор, тогда*

$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G)/O_p(G)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G/O_p(G)).$$

Следствие 4.1.5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы,* θ *– абнормально полный подгрупповой функтор и подгруппа* $\Phi_{\theta_p}(G)$, *тогда* $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G)/O_p(G)\in\mathfrak{F}$.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация,* θ *– абнормально полный подгрупповой функтор, группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, *и* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)\neq G$, *тогда*

$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)/O_p(G)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G/O_p(G),A).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K=\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\Phi_{\theta_p}(G,A).$$

Пусть $K\nsubseteq\Phi_{\theta_p}(G,A)$. Тогда в G найдётся такая максимальная A-допустимая θ-подгруппа M, индекс которой не делится на простое число p, что $G=KM$. Понятно, что M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M\notin\mathfrak{F}$, то $K\subseteq\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)\subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M\in\mathfrak{F}$. Отсюда

$$G/K=MK/K\simeq M/M\cap K\in\mathfrak{F},$$

а это значит, что $G^{\mathfrak{F}}\subseteq K\subseteq\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)$. Это противоречит существованию в группе G максимальной A-допустимой θ-подгруппы, не содержащей $G^{\mathfrak{F}}$ индекс которой не делится на простые числа из π. Итак, $K\subseteq\Phi_{\theta_p}(G,A)$.

Пусть $O_p(G) \neq 1.$ Тогда по теореме 3.5
$$\Phi_{\theta_p}(G, A) / O_p(G) = \Phi_\theta(G / O_p(G), A),$$
откуда получаем справедливость теоремы для группы $G / O_p(G)$ по индукции. Следовательно,
$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G / O_p(G), A) / O_p(G / O_p(G)) = \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G / O_p(G) / O_p(G / O_p(G)), A).$$
Так как $O_p(G / O_p(G)) = 1$ и по лемме 3.2
$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G / O_p(G), A) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) / O_p(G),$$
то
$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) / O_p(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G / O_p(G), A).$$
Пусть теперь $O_p(G) = 1.$ Тогда
$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta_p}(G, A) = \Phi_\theta(G, A).$$
Пусть K / N – главный фактор группы $G,$ причём,
$$\Phi_\theta(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A).$$
Так как
$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_\theta(G, A),$$
то
$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}.$$
Поэтому имеет место следующий изоморфизм:
$$KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}} \simeq K / K \cap NG^{\mathfrak{F}} = K / N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K / N.$$
Так как $G / NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$ поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-центральным в $G.$ Следовательно, главный фактор K / N также является $\mathfrak{F}$-центральным в $G.$ Таким образом, $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) / \Phi_\theta(G, A)$ – $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Phi_\theta(G, A).$ Поэтому
$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) / \Phi_\theta(G, A) \subseteq Z^{\mathfrak{F}}_\infty(G / \Phi_\theta(G, A)).$$
С другой стороны, на основании теоремы 3.3
$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) / \Phi_\theta(G, A) \supseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G, A) / \Phi_\theta(G, A) = Z^{\mathfrak{F}}_\infty(G / \Phi_\theta(G, A)).$$
Значит,
$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) / \Phi_\theta(G, A) = Z^{\mathfrak{F}}_\infty(G / \Phi_\theta(G, A)).$$
Следовательно,
$$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) / \Phi_\theta(G, A) = \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G, A) / \Phi_\theta(G, A),$$
то есть $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) = \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G, A).$ Теорема доказана.

Следствие 4.2.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1,$ θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) \neq G,$ тогда*
$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}.$$
Если группа операторов тривиальна, то из теоремы 4.2 получаем

Следствие 4.2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G) \neq G.$ Тогда*

$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G)/O_p(G)=\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G/O_p(G)).$$

Следствие 4.1.3. *Пусть* θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)\neq G$. *Если* $\mathfrak{F}$ *–* S_n*-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_p}(G,A)/O_p(G)\in\mathfrak{F}$.

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – V. 58. – P. 160–170.
3. Deskins, W. A condition for the solvability of a finite group / W. Deskins // III. J. Math. – 1961. – V. 5, № 2. – P. 306–313.
4. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
5. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
6. Кондратьев, А. С. Конечные группы. Итоги науки и техники / А. С. Кондратьев, А. А. Махнев, А. И. Старостин. – М. :ВИНИТИ, 1986. – С. 3–120.
7. Carter, R. The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // III. J. Math. – 1967. – V. 5, № 2. – P. 175–202.
8. Шеметков, Л. А. Ступенчатые формации групп / Л. А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.
9. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2019. – № 14 (02). – DOI : 10.1142/S1793557121500261
10. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.
11. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 03.03.2024