Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (150), 2025

УДК 512.542 EDN: NOWLGI

О конечных группах, факторизуемых слабо перестановочными подгруппами

С.И. Ленденкова

Подгруппы A и B конечной группы G будем называть слабо перестановочными (слабо взаимно перестановочными), если $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ и $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 – субнормальные в G подгруппы, а подгруппы A_2 и B_2 перестановочны (взаимно перестановочны). В настоящей работе показано, что многие известные результаты, связанные с конечными группами, факторизуемые взаимно перестановочными подгруппами, и их обобщениями, можно перенести на конечные группы, факторизуемые слабо взаимно перестановочными подгруппами. В частности, конечная группа $G = AB$ разрешима, если A и B – разрешимые слабо взаимно перестановочные подгруппы. Также устанавливается разрешимость группы $G = AB$ при условии, что подгруппы A и B разрешимы и каждая картерова подгруппа из A слабо перестановочна с каждой картеровой подгруппой из B.
Ключевые слова: конечная группа, перестановочная подгруппа, слабо перестановочные подгруппы, разрешимая группа.

Subgroups A and B of a finite group G are said to be weakly permutable (weakly mutually permutable), if $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ and $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, where A_1, B_1 are subnormal subgroups of G and A_2 and B_2 are permutable (mutually permutable) subgroups. In this paper, we show that many known results related to finite factorized groups with mutually permutable factors and their generalizations can be transferred to finite groups factorized by weakly permutable subgroups. In particular, a finite group $G = AB$ is solvable if A and B are solvable weakly permutable subgroups. We also prove that a group $G = AB$ is solvable if A and B are solvable subgroups and each Carter subgroup of A weakly permutes with each Carter subgroup of B.
Keywords: finite group, permutable subgroups, weakly permutable subgroups, solvable group.

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и терминология соответствуют [1].

Пусть A и B – подгруппы группы G. Если $G = AB$, то говорят, что группа G факторизуется подгруппами A и B. В этом случае также говорят, что группа G является произведением своих подгрупп A и B, а подгруппы A и B называются сомножителями (факторами). Ясно, что строение факторизуемой группы зависит как от строения самих сомножителей и их взаимного расположения, так и способов вложения сомножителей в группу.

Будем говорить, что подгруппы A и B группы G *перестановочны*, если $AB = BA$. В [2] предложены следующие понятия.

Определение 1. Подгруппы A и B группы G называются *взаимно перестановочными*, если A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A.

Определение 2. Подгруппы A и B группы G называются *тотально перестановочными*, если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B.

М. Асаад и А. Шаалан в [3] получили глубокие результаты о строении групп, факторизуемых взаимно перестановочными (тотально перестановочными) подгруппами. Ключевые результаты этой тематики отражены в монографии А. Баллестера-Болинше, Р. Эстабана-Ромеро и М. Асаада [4].

В работе Ц. Хуана, Б. Ху и А.Н. Скибы [5] введено новое понятие слабо субнормальной подгруппы, связанное с порождением двух подгрупп, одна из которых субнормальна, а вторая обладает определенными свойствами.

Используя данную концепцию введем следующее

Определение 3. Подгруппы A и B группы G будем называть *слабо взаимно перестановочными* (*слабо тотально перестановочными*), если $A = \langle A_1, A_2 \rangle$, $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 – субнормальные в G подгруппы, а подгруппы A_2, B_2 взаимно перестановочны (тотально перестановочны соответственно). Здесь и далее запись $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ означает, что подгруппа H порождается своими подгруппами H_1 и H_2.

Основные результаты, связанные с группами, факторизуемые взаимно перестановочными подгруппами и их обобщениями, можно перенести на группы, факторизуемые слабо взаимно перестановочными подгруппами. В частности, группа $G = AB$ разрешима, если A и B – разрешимые слабо взаимно перестановочные подгруппы. Также устанавливается разрешимость группы $G = AB$ при условии, что подгруппы A и B разрешимы и каждая картерова подгруппа из A слабо перестановочна с каждой картеровой подгруппой из B.

Вспомогательные результаты. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих порядок группы G, а наибольшая нормальная π-подгруппа группы G – через $O_\pi(G)$ для $\pi \subseteq \pi(G)$, в частности, если $\pi = \{p\}$, то $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G. Напомним, что $A^G = \langle A^g | g \in G \rangle$ – наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая A. Запись $X \leq Y, X < Y, X \lhd Y, X \lhd\lhd Y$ означает, что X – подгруппа в группе Y, собственная подгруппа, нормальная подгруппа, субнормальная подгруппа соответственно; $|X:Y|$ – индекс подгруппы Y в группе X. Группа G метанильпотентна (мета-p-нильпотентна), если существует нильпотентная (p-нильпотентная) нормальная подгруппа фактор-группа по которой нильпотентна (соответственно p-нильпотентна).

Лемма 1 ([1], [6]). *Пусть $K \lhd\lhd G, r \in \pi(G)$. Тогда*

(1) *если K r-разрешима, то K^G r-разрешима;*

(2) *если K разрешима, то K^G разрешима;*

(3) *если K нильпотентна, то K^G нильпотентна;*

(4) *если K сверхразрешима, то K^G метанильпотентна, в частности разрешима;*

(5) *если K p-сверхразрешима, то K^G мета-p-нильпотентна;*

(6) $K \leq O_{\pi(K)}(G)$.

Лемма 2 [4, лемма 4.1.10]. *Пусть $G = AB$, где A и B – тотально перестановочные (взаимно перестановочные) подгруппы группы G. Если N нормальная подгруппа группы G, то G/N представима в виде произведения тотально перестановочных (взаимно перестановочных) подгрупп AN/N и BN/N.*

Напомним, что *картеровой* подгруппой группы называют нильпотентную самонормализуемую подгруппу [7]. *Гашюцевой* подгруппой [7] группы G называют подгруппу H, удовлетворяющую следующим двум условиям:

(1) H сверхразрешима;

(2) если $H \leq H_1 < T \leq G$, то $|T: H_1|$ – не простое число.

Лемма 3 [8]. (1) *Пусть G – группа, A – разрешимая подгруппа, N – разрешимая нормальная в G подгруппа. Если K – картерова подгруппа в A, то KN/N – картерова подгруппа в AN/N.*

(2) *Пусть K – картерова подгруппа разрешимой группы G. Если K_1 – картерова подгруппа группы G, то существует $g \in G$, такой что $K_1^g = K$.*

В неразрешимой группе картеровы подгруппы могут и не существовать. Таким примером является простая группа порядка 60 (A_5). Однако картеровы подгруппы сопряжены в любой группе, в которой они существуют [9].

Лемма 4 [8]. (1) *В любой разрешимой группе гашюцевы подгруппы существуют и сопряжены между собой.*

(2) *Пусть G – группа, H – ее подгруппа, $N \lhd G$. Если L – гашюцева подгруппа в H, то LN/N – гашюцева подгруппа в HN/N.*

В неразрешимых группах гашюцевы подгруппы могут иметь разные порядки. Так, например, в простой группе порядка 60 гашюцевы подгруппы имеют порядки 10 и 6. В частности, в неразрешимых группах гашюцевы подгруппы могут быть не сопряжены.

Критерии разрешимости группы со слабо перестановочными подгруппами.

Определение 4. Подгруппы A и B группы G будем называть *слабо перестановочными*, если $A = \langle A_1, A_2 \rangle$, $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 субнормальны в G, а A_2, B_2 перестановочны.

Теорема 1. *Пусть A и B – разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Группа G разрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *каждая картерова подгруппа из A слабо перестановочна с каждой картеровой подгруппой из B;*

(2) *картерова подгруппа в A имеет нечетный порядок и каждая картерова подгруппа из A слабо перестановочна с каждой гашюцевой подгруппой из B.*

Доказательство. Оба утверждения теоремы 1 будем доказывать одновременно с помощью индукции по порядку группы. Пусть $K = \langle K_1, K_2 \rangle$ – картерова подгруппа из A (картерова подгруппа нечетного порядка в случае (2)) и $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ – картерова (гашюцева в случае (2)) подгруппа из B. Здесь K_1, H_1 – субнормальные в G подгруппы, а подгруппы K_2 и H_2 перестановочны. По лемме 1 (3), (4) K_1^G нильпотентна в обоих случаях, а H_1^G нильпотентна в случае (1) и метанильпотентна в случае (2). Поэтому $N = K_1^G H_1^G$ – нормальная нильпотентная (метанильпотентная в случае (2)) подгруппа, в частности, N – разрешимая подгруппа группы G. Фактор-группа $G/N = (AN/N)(BN/N)$, где $AN/N \cong A/A \cap N$ и $BN/N \cong B/B \cap N$ – разрешимые подгруппы. По лемме 3 (1) KN/N – картерова подгруппа (картерова подгруппа нечетного порядка в случае (2)) в AN/N, а HN/N – картерова подгруппа по лемме 3 (1) (гашюцева по лемме 4 (2) в случае (2)) подгруппа из BN/N соответственно. Так как $K_1 \leq N$ и $H_1 \leq N$, то $KN/N = K_2N/N$ и $HN/N = H_2N/N$ перестановочны. По [8, теорема 1] фактор-группа G/N разрешима, значит, группа G разрешима.

Теорема 2. *Пусть A и B – разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Группа G разрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *каждая силовская подгруппа из A слабо перестановочна с каждой силовской подгруппой из B;*

(2) *каждая силовская подгруппа из A слабо перестановочна с каждой картеровой подгруппой из B;*

(3) *подгруппа A имеет нечетный порядок и каждая силовская подгруппа из A слабо перестановочна с каждой гашюцевой подгруппой из B.*

Доказательство. Пусть $P = \langle P_1, P_2 \rangle$ – силовская p-подгруппа из A, $Q = \langle Q_1, Q_2 \rangle$ – силовская q-подгруппа из B и $K = \langle K_1, K_2 \rangle$ – картерова (гашюцева) подгруппа из B, где P_1 и $Q_1(K_1)$ субнормальны в G, а P_2 и $Q_2(K_2)$ перестановочны. По лемме 1 (6), (3), (4) $P_1 \leq O_p(G)$, $Q_1 \leq O_q(G)$, K_1^G нильпотентна (метанильпотентна, если K – гашюцева), в частности, K_1^G разрешима в любом случае. Ясно, что $N = O_p(G)O_q(G)$ ($N = O_p(G)K_1^G$) – нормальная разрешимая подгруппа группы G и фактор-группа $G/N = (AN/N)(BN/N)$, где AN/N и BN/N разрешимы. Также ясно, что $PN/N = P_2N/N$ – силовская p-подгруппа из AN/N.

(1) Подгруппа $QN/N = Q_2N/N$ является q-подгруппой в BN/N. По условию подгруппы P_2 и Q_2 перестановочны, поэтому PN/N и QN/N перестановочны. Согласно [8, теорема 2 (1)] фактор-группа G/N разрешима, а значит, группа G разрешима.

(2) По лемме 3 (1) $KN/N = K_2N/N$ – картерова подгруппа из BN/N. По условию подгруппы P_2 и K_2 перестановочны, поэтому подгруппы PN/N и KN/N перестановочны. Согласно [8, теорема 2 (2)] фактор-группа G/N разрешима, а значит, группа G разрешима.

(3) По лемме 4 (2) $KN/N = K_2N/N$ – гашюцева подгруппа из BN/N. По условию подгруппы P_2 и K_2 перестановочны, поэтому подгруппы PN/N и KN/N перестановочны. Согласно [8, теорема 2 (3)] фактор-группа G/N разрешима, а значит, группа G разрешима.

Критерии разрешимости группы со слабо взаимно перестановочными (слабо тотально перестановочными) подгруппами.

Теорема 3. *Пусть p – простое число и группа $G = AB$, где A и B – слабо взаимно перестановочные подгруппы группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если подгруппы A и B разрешимы, то G разрешима;*

(2) *если подгруппы A и B p-разрешимы, то G p-разрешима.*

Доказательство. Пусть $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ и $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 субнормальны в G, а A_2, B_2 взаимно перестановочны. Подгруппы A_1^G и B_1^G нормальны в группе G.

(1) По лемме 1 (2) подгруппы A_1^G и B_1^G разрешимы и подгруппа $N = A_1^G B_1^G$ разрешима. Фактор-группа $G/N = (A_2N/N)(B_2N/N)$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп A_2N/N и B_2N/N по лемме 2. По [4, теорема 4.1.15] фактор-группа G/N разрешима, а значит, G разрешима.

(2) По лемме 1 (1) подгруппы A_1^G и B_1^G p-разрешимы и подгруппа $N = A_1^G B_1^G$ p-разрешима. Фактор-группа $G/N = (A_2N/N)(B_2N/N)$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп A_2N/N и B_2N/N по лемме 2. По [4, теорема 4.1.15] фактор-группа G/N p-разрешима, а значит, G p-разрешима.

Следствие 1. *Пусть p – простое число и группа $G = AB$, где A и B – слабо тотально перестановочные подгруппы группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если подгруппы A и B разрешимы, то G разрешима;*

(2) *если подгруппы A и B p-разрешимы, то G p-разрешима.*

Доказательство. По условию $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ и $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 субнормальны в G, а A_2 и B_2 тотально перестановочны. Так как тотально перестановочные подгруппы являются взаимно перестановочными подгруппами, то подгруппы A и B слабо взаимно перестановочны. Тогда по теореме 3 группа G разрешима в случае (1) и p-разрешима в случае (2).

О корадикале группы, факторизуемой слабо tcc-перестановочными подгруппами (слабо tcc-подгруппами).

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и G – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ или $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, корадикал называют нильпотентным или сверхразрешимым соответственно.

Развитие тотально и взаимно перестановочных подгрупп привело, в частности, к таким понятиям как tcc-перестановочные подгруппы и tcc-подгруппы.

Определение 5 [10]. Подгруппы A и B группы G называются *tcc-перестановочными*, если для любой подгруппы X из A и для любой подгруппы Y из B существует элемент $u \in \langle X, Y \rangle$ такой, что $XY^u \leq G$.

По аналогии с определениями слабо взаимно перестановочных (слабо тотально перестановочных) подгрупп введем следующее понятие.

Определение 6. Подгруппы A и B группы G будем называть *слабо tcc-перестановочными*, если $A = \langle A_1, A_2 \rangle$, $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 субнормальны в G, а A_2, B_2 tcc-перестановочны.

Лемма 5. *Пусть A и B – tcc-перестановочные подгруппы группы G и $N \lhd G$. Тогда AN/N и BN/N – tcc-перестановочные подгруппы группы G/N.*

Доказательство. Пусть X/N – подгруппа группы AN/N, а Y/N – подгруппа группы BN/N. Так как $N \leq X \leq AN$, то по тождеству Дедекинда $X = X \cap AN = N(X \cap A)$. Аналогично, $Y = Y \cap BN = N(Y \cap B)$. Поскольку $X \cap A \leq A$, а $Y \cap B \leq B$, то из tcc-перестановочности подгрупп A и B получаем, что $(X \cap A)(Y \cap B)^u \leq G$ для некоторого элемента $u \in \langle X \cap A, Y \cap B \rangle$. Тогда $(X/N)(Y/N)^{uN} = (X \cap A)(Y \cap B)^u N/N \leq G/N$ для некоторого элемента $uN \in \langle X \cap A, Y \cap B \rangle N/N \leq \langle A, B \rangle N/N = \langle A/N, B/N \rangle$. По определению 5 подгруппы AN/N и BN/N tcc-перестановочны в G/N.

Теорема 4. *Пусть $G = AB$, A и B – слабо tcc-перестановочные подгруппы группы G.*

(1) *если A и B сверхразрешимы, то сверхразрешимый корадикал группы G метанильпотентен;*

(2) *если A и B tcc-сверхразрешимы, то p-сверхразрешимый корадикал группы G мета-p-нильпотентен.*

Доказательство. (1) Пусть $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ и $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 субнормальны в G, а A_2 и B_2 tcc-перестановочны. Тогда A_1^G и B_1^G нормальны в группе G и метанильпотентны по лемме 1 (4). Подгруппа $N = A_1^G B_1^G$ метанильпотентна и нормальна в G. Фактор-группа $G/N = (AN/N)(BN/N) = (A_2N/N)(B_2N/N)$ – произведение tcc-перестановочных подгрупп по лемме 5. Тогда по [11, теорема A] сверхразрешимый корадикал метанильпотентен.

(2) Пусть $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ и $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 субнормальны в G, а A_2 и B_2 tcc-перестановочны. Тогда A_1^G и B_1^G нормальны в группе G и мета-p-нильпотентны по лемме 1 (5). Подгруппа $N = A_1^G B_1^G$ мета-p-нильпотентна и нормальна в G. Фактор-группа $G/N = (AN/N)(BN/N) = (A_2N/N)(B_2N/N)$ – произведение tcc-перестановочных подгрупп по лемме 5. Тогда по [3, теорема 4.1] p-сверхразрешимый корадикал мета-p-нильпотентен.

В [12] А.А. Трофимук ввел следующее определение.

Определение 7. Подгруппа A группы G называется *tcc-подгруппой*, если существует подгруппа T группы G такая, что $G = AT$ и подгруппы T и A tcc-перестановочны.

Определение 8. Подгруппу A группы G будем называть *слабо tcc-подгруппой*, если $A = \langle A_1, A_2 \rangle$, где A_1 субнормальна в G, а A_2 – tcc-подгруппа.

Теорема 5. *Пусть $G = AB$, A и B – слабо tcc-подгруппа группы G.*

(1) *Если подгруппы A и B сверхразрешимы, то сверхразрешимый корадикал метанильпотентен.*

(2) *Если подгруппы A и B p-сверхразрешимы, то p-сверхразрешимый корадикал мета-p-нильпотентен.*

Доказательство. (1) Пусть $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ и $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 субнормальны в G, а A_2 и B_2 – tcc-подгруппы. Тогда A_1^G и B_1^G нормальны в группе G и метанильпотентны по лемме 1 (4). Тогда A_1^G и B_1^G нормальны в группе G и метанильпотентны по лемме 1 (4). Подгруппа $N = A_1^G B_1^G$ метанильпотентна и нормальна в G. Фактор-группа $G/N = (A_2N/N)(B_2N/N)$ – произведение tcc-подгрупп A_2N/N и B_2N/N по [12, лемме 3.1]. Тогда по [12, теорема 4.1] сверхразрешимый корадикал метанильпотентен.

(2) Пусть $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ и $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1, B_1 субнормальны в G, а A_2 и B_2 tcc-перестановочны. Тогда A_1^G и B_1^G нормальны в группе G и мета-p-нильпотентны по лемме 1 (5). Подгруппа $N = A_1^G B_1^G$ мета-p-нильпотентна и нормальна в G. Фактор-группа $G/N = (A_2N/N)(B_2N/N)$ – произведение tcc-подгрупп A_2N/N и B_2N/N по [12, лемме 3.1]. Тогда по [12, следствие 4.1] p-сверхразрешимый корадикал мета-p-нильпотентен.

Замечание. Полученные результаты позволяют теоремы о кратно факторизуемых группах с условием взаимно перестановочности (тотально перестановочности) некоторых подгрупп из сомножителей распространить на группы с условием слабо взаимно перестановочности (слабо тотально перестановочности) [4, теорема 4.1.31, теорема 4.1.31, теорема 4.33, теорема 4.1.35].

Литература

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. Carrocca, A. p-supersolvabiliry of factorized finite groups / A. Carrocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – № 4. – P. 395–403.

3. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Assaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – № 53. – P. 318–326.

4. Ballester-Bolinches, A. Product finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estaban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

5. Хуан, Ц. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуан, Б. Ху, А. Н. Скиба // Сиб. мат. журн. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 210–220.

6. Lennox, J. C. Subnormal subgroups of groups / J. C. Lennox, S. E. Stonehewer. – Oxford : Clarendon Press, 1987. – 270 p.

7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – de Gruyter Exp. Math. 4. – Berlin : Walter de Gruyter, 1992. – 901 p.

8. Монахов, В. С. О разрешимости группы с перестановочными подгруппами / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2013. – Т. 94, № 3. – С. 436–441.

9. Вдовин, Е. П. Картеровы подгруппы конечных групп / Е. П. Вдовин // Мат. тр. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 20–106.

10. Arroyo-Jorda, M. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // J. Algebra. – 2017. – V. 476. – P. 395–414.

11. Guo, W. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, P. Shum, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – V. 68, № 3–4. – P. 433–499.

12. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // J. Algebra Appl. – 2021. – № 20 (3). – 2150020 (18 page).

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 14.03.2025