Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (150), 2025

УДК 519.17 EDN: RCUTWL

Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{60,52,10;1,10,48\}$ не существует

Хайан Ли[1], К.С. Ефимов[2,3], А.А. Махнёв[2,4]

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_2 будет сильно регулярным, если Γ имеет собственное значение $a_2 - c_3$. Если дополнительно Γ имеет собственное значение $\theta_2 = 0$, то Γ имеет массив пересечений $\{yx + yz, yz - y, xy - x; 1, x + z, yz\}$. Дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственным значением $\theta_1 = a_3$ называется графом Шилла. Для графа Шилла число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Имеется 3 допустимых массива пересечений примитивных дистанционно регулярных графов диаметра 3 и степени 60. Все они отвечают графам Шилла. Граф с массивом пересечений $\{60,42,18;1,6,40\}$ имеет $b = 3$. Граф с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$ принадлежит указанной серии для $x = 2, y = 5, z = 10$ и не существует. Наконец, граф Шилла с массивом пересечений $\{60,52,10;1,10,48\}$ имеет $b_2 = 3$ и принадлежат серии $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs; 1, bs, (b^2-1)s\}$ для $b = 5, s = 2$. В работе доказано, что граф с массивом пересечений $\{60,52,10;1,10,48\}$ не существует.
Ключевые слова: граф Шилла, дистанционно регулярный граф.

For a distance-regular graph Γ of diameter 3, graph Γ_2 will be strongly regular if Γ has an eigenvalue $a_2 - c_3$. If additionally Γ has an eigenvalue $\theta_2 = 0$, then Γ has an intersection array $\{yx + yz, yz - y, xy - x; 1, x + z, yz\}$. A distance-regular graph of diameter 3 with eigenvalue $\theta_1 = a_3$ is called a Schilla graph. For the Schilla graph, the number $a = a_3$ divides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. There are 3 admissible intersection arrays of primitive distance-regular graphs of diameter 3 and degree 60. All of them correspond to Schilla graphs. The graph with intersection array $\{60,42,18;1,6,40\}$ has $b = 3$. The graph with intersection array $\{60,45,8;1,12,50\}$ belongs to the specified series for $x = 2, y = 5, z = 10$ and does not exist. Finally, the Schilla graph with intersection array $\{60,52,10;1,10,48\}$ has $b_2 = 3$ and belongs to the series $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs; 1, bs, (b^2-1)s\}$ for $b = 5, s = 2$. The work proves that the graph with intersection array $\{60,52,10;1,10,48\}$ does not exist.
Keywords: Schilla graph, distance regular graph.

Введение. Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ)), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b) = 1$ (если $d(a,b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ) λ-*подграфом*.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$ с $[w]$). Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u,w)$ и $c_i = c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$) и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p_{ij}^l и параметры Крейна q_{ij}^l определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i \epsilon \{1,2,\ldots,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_{\Gamma(u,w)} = i$.

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_2 будет сильно регулярным, если Γ имеет собственное значение $a_2 - c_3$ (см. [2]). Если дополнительно Γ имеет собственное значение $\theta_2 = 0$, то Γ имеет массив пересечений $\{yx + yz, yz - y, xy - x; 1, x + z, yz\}$ (см. [3]).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственным значением $\theta_1 = a_3$ (см. [4]). Для графа Шилла число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$.

Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab, (a + 1)(b - 1), b_2; 1, c_2, a(b - 1)\}$.

Имеется 3 допустимых массива примитивных дистанционно регулярных графов диаметра 3, степени 60 с числом вершин не большим 1024 (см. [1]). Все они отвечают графам Шилла.

Граф с массивом пересечений $\{60{,}42{,}18; 1{,}6{,}40\}$ имеет $b = 3$. Граф с массивом пересечений $\{60{,}45{,}8; 1{,}12{,}50\}$ принадлежит указанной серии для $x = 2, y = 5, z = 10$. Наконец, граф Шилла с массивом пересечений $\{60{,}52{,}10; 1{,}10{,}48\}$ имеет $b_2 = c_2$ и принадлежит серии $\{b(b + 1)s, (bs + s + 1)(b - 1), bs; 1, bs, (b^2 - 1)s\}$ для $b = 5, s = 2$.

В работе изучается граф Шилла с массивом пересечений $\{60{,}52{,}10; 1{,}10{,}48\}$.

Теорема: Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{60{,}52{,}10; 1{,}10{,}48\}$ не существует.

Тройные числа пересечений. В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений (см. [6]).

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 – вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{matrix}\right\}$ – множество вершин $w \epsilon \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \left|\left\{\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{matrix}\right\}\right|$. Числа $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1 \quad r_2 \quad r_3]$.

Пусть u, v, w – вершины графа Γ, $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0 \quad j \quad h]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0 \quad j \quad h] = \delta_{jW} * \delta_{hV}$.

Аналогично, $[i \quad 0 \quad h] = \delta_{iW} * \delta_{hU}$ и $[i \quad j \quad 0] = \delta_{iU} * \delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей. Получим:

$$\sum_{l=1}^{d} [ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh],$$
$$\sum_{l=1}^{d} [ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h], \tag{+}$$
$$\sum_{l=1}^{d} [ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0].$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} u & v & w \\ r & s & t \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим

$$\{i, j, h\} = \left\{\begin{matrix} u & v & w \\ i & j & h \end{matrix}\right\}, [i, j, h] = \begin{bmatrix} u & v & w \\ i & j & h \end{bmatrix}, [i, j, h]' = \begin{bmatrix} u & w & v \\ i & h & j \end{bmatrix},$$
$$[i, j, h]^{*} = \begin{bmatrix} v & u & w \\ j & i & h \end{bmatrix}, [u, v, w]^{sim} = \begin{bmatrix} u & v & w \\ h & j & i \end{bmatrix}.$$

Вычисление параметров $[uvw]'$, $[uvw]^{*}$ и $[uvw]^{sim}$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Доказательство теоремы 1. В этом разделе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{60{,}52{,}10; 1{,}10{,}48\}$.

Тогда Γ имеет $1 + 60 + 312 + 65 = 438$ вершин, спектр $\{60^1, 12^{73}, 0^{292}, -13^{72}\}$, матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 73 & 292 & 72 \\ 1 & \frac{73}{5} & 0 & -\frac{78}{5} \\ 1 & 0 & \frac{-73}{13} & \frac{60}{13} \\ 1 & \frac{-73}{5} & \frac{292}{13} & \frac{-576}{65} \end{pmatrix}$$

и числа пересечений:

$$p_{11}^1 = 7, p_{12}^1 = 52, p_{13}^1 = 0, p_{21}^1 = 52, p_{22}^1 = 208, p_{23}^1 = 52, p_{31}^1 = 0, p_{32}^1 = 52, p_{33}^1 = 13$$
$$p_{11}^2 = 10, p_{12}^2 = 40, p_{13}^2 = 10, p_{21}^2 = 40, p_{22}^2 = 226, p_{23}^2 = 45, p_{31}^2 = 10, p_{32}^2 = 45, p_{33}^2 = 10$$
$$p_{11}^3 = 0, p_{12}^3 = 48, p_{13}^3 = 12, p_{21}^3 = 48, p_{22}^3 = 216, p_{23}^3 = 48, p_{31}^3 = 12, p_{32}^3 = 48, p_{33}^3 = 4.$$

Пусть u, v, w – вершины графа Γ, $\{rst\} = \begin{Bmatrix} u & v & w \\ r & s & t \end{Bmatrix}$ и $[rst] = \begin{bmatrix} u & v & w \\ r & s & t \end{bmatrix}$.

Положим $\Sigma = \Gamma_3(u), \Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени $p_{23}^3 = 48$ на $k_3 = 65$ вершинах.

Лемма 1. Пусть $\mathrm{d}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \mathrm{d}(\mathrm{u},\mathrm{w}) = 3, \mathrm{d}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = 1$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$[122] = -r_{12} - r_{13} - r_{14} + 175, [123] = [132] = r_{12} + r_{13} + r_{14} - 127,$$
$$[133] = -r_{12} - r_{13} - r_{14} + 139;$$
$$[211] = -r_{14} + 7, [212] = [221] = r_{14} + 41, [222] = r_{12},$$
$$[223] = [232] = -r_{12} - r_{14} + 175, [233] = r_{12} + r_{14} - 127;$$
$$[311] = r_{14}, [312] = [321] = -r_{14} + 11, [322] = r_{13} + r_{14} + 33,$$
$$[323] = [332] = -r_{13} + 4, [333] = r_{13},$$

где $0 \le r_{13} \le 4{,}120 \le r_{12} \le 139, 0 \le r_{14} \le 7, 127 \le r_{12} + r_{14} \le 139$.

Доказательство.

Упрощения формул (+).

По лемме 1 имеем $[322] = r_{13} + r_{14} + 33 \le 44$.

Так как $\{u, w\} \cap \Lambda(u) \cap \Lambda(w)$ содержит 98$-$[322] вершин, то 33$\le$ [322] $\le$ 44.

Лемма 2. Пусть $\mathrm{d}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \mathrm{d}(\mathrm{u},\mathrm{w}) = \mathrm{d}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = 3$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$[122] = r_{37}, [123] = [132] = -r_{37} + 48, [133] = r_{37} - 36;$$
$$[212] = r_{34} + r_{35} - r_{36} - r_{37} + 48, [213] = -r_{34} - r_{35} + r_{36} + r_{37}, [222]$$
$$= -r_{35} + r_{36} + 168, [223] = r_{35}, [231] = r_{36}, [232] = -r_{34} + r_{37},$$
$$[233] = r_{34} - r_{36} - r_{37} + 48;$$
$$[312] = -r_{34} - r_{35} + r_{36} + r_{37}, [313] = r_{34} + r_{35} - r_{36} - r_{37} + 12, [321] = r_{36},$$
$$[322] = r_{35} - r_{36} - r_{37} + 48, [323] = -r_{35} + r_{37}, [332] = r_{34}, [333] = -r_{34} + r_{36} + 9,$$

где $0 \le r_{34} \le 3, 33 \le r_{35} \le 39, 9 \le r_{36} \le 12, 36 \le r_{37} \le 39, r_{35} \le r_{37}$.

Доказательство.

Упрощения формул (+).

По лемме 2 имеем $[322] = r_{35} - r_{36} - r_{37} + 48 \le 42$. Как и выше, 33$\le$ [322] $\le$ 42.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p_{13}^3 = 12, p_{23}^3 = 48, p_{33}^3 = 4$, то $528 = 12 \cdot 33 + 4 \cdot 33 \le d \le 12 \cdot 44 + 4 \cdot 42 = 696$. С другой стороны, $d = 48 \cdot (47 - \lambda)$, поэтому $11 \le 47 - \lambda \le 14{,}5$ и $33{,}5 \le \lambda \le 36$, где $\lambda -$ среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 3. Пусть $\mathrm{d}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \mathrm{d}(\mathrm{u},\mathrm{w}) = 3, \mathrm{d}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$[122] = -r_{33} + 48, [123] = [132] = r_{33}, [133] = -r_{33} + 12;$$
$$[211] = -r_{31} + r_{32} + 8, [212] = r_{29}, [213] = -r_{29} + r_{31} - r_{32} + 40, [221] = -r_{32} + 40,$$
$$[222] = -r_{30} + r_{32} + 176, [223] = r_{30}, [231] = r_{31}, [232] = r_{29} + r_{30} - r_{32} + 40,$$
$$[233] = r_{29} - r_{30} - r_{31} + r_{32} + 8;$$
$$[311] = r_{31} - r_{32} + 2, [312] = -r_{29} + 40, [313] = r_{29} - r_{31} + r_{32} - 30,$$

$$[321] = r_{32}, [322] = r_{30} - r_{32} + r_{33} + 2, [323] = -r_{30} - r_{33} + 45,$$
$$[331] = -r_{31} + 10, [332] = -r_{29} - r_{30} + r_{32} - r_{33} + 5,$$
$$[333] = -r_{29} + r_{30} + r_{31} - r_{32} + r_{33} - 11,$$

где $28 \le r_{29} \le 40$, $29 \le r_{30} \le 42$, $6 \le r_{31} \le 10$, $0 \le r_{32} \le 12$, $3 \le r_{33} \le 12$, $r_{32} - r_{31} \le 2$.

Доказательство.

Упрощения формул (+).

По лемме 3 имеем $[322] = r_{30} - r_{32} + r_{33} + 2 \le 56$. Как и выше, $31 \le [322]$.

Пусть $d(u,v) = 3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин y,z на расстоянии 1 в графе Γ, где $y \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $[321] = -r_{14} + 11$, где $0 \le r_{14} \le 7$, поэтому $48 = 12(11-7) \le f_1 \le 12(11-0) = 132$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[311] = r_{31} - r_{32} + 2$, поэтому

$$48 \le f_1 = -\sum_i (-r_{31}^i + r_{32}^i) + 96 \le 132,$$
$$-36 \le \sum_i (-r_{31}^i + r_{32}^i) \le 48,$$
$$-0{,}75 \le \sum_i (r_{31}^i + r_{32}^i)/48 \le 1.$$

Подсчитаем число f_2 пар вершин y,z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $33 \le [322] \le 44$, поэтому $396 \le f_2 \le 528$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[312] = -r_{29} + 40$, поэтому

$$396 \le f_2 = -\sum_i r_{29}^i + 2160 \le 528,$$
$$1632 \le \sum_i r_{29}^i \le 1764,$$
$$34 \le \frac{1}{25}\sum_i r_{29}^i /48 \le 36{,}75.$$

Подсчитаем число f_3 пар вершин y,z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $[323] = -r_{13} + 4$, где $r_{13} \le 4$, поэтому $0 \le f_3 \le 192$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[313] = r_{29} - r_{31} + r_{32} - 30$, поэтому

$$0 \le f_3 = \sum_i (r_{29}^i - r_{31}^i + r_{32}^i) - 1440 \le 192,$$
$$1440 \le \sum_i (r_{29}^i - r_{31}^i + r_{32}^i) \le 1632,$$
$$30 \le \sum_i (r_{29}^i - r_{31}^i + r_{32}^i)/48 \le 34.$$

Подсчитаем число g_2 пар вершин y,z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 3 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} u & v \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $31 \le [322] \le 56$, поэтому $124 \le g_2 \le 224$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[332] = -r_{29} - r_{30} + r_{32} - r_{33} + 5$, поэтому

$$124 \le -\sum_i (r_{29}^i + r_{30}^i - r_{32}^i + r_{33}^i) + 240 \le 224,$$
$$16 \le \sum_i (r_{29}^i + r_{30}^i - r_{32}^i + r_{33}^i) \le 116,$$

$$0{,}333 \le \sum_i (r_{29}^i + r_{30}^i - r_{32}^i + r_{33}^i)/48 \le 2{,}417$$

Противоречие с тем, что $28 \le r_{29} \le 40, 29 \le r_{30} \le 42, 0 \le r_{32} \le 12, 3 \le r_{33} \le 12$ и $28 + 29 - 12 + 3 = 48 \le \sum_i (r_{29}^i + r_{30}^i - r_{32}^i + r_{33}^i)/48$.

Теорема доказана.

Литература

1. Brouwer, A.E. Distance-regular graphs / A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1989. – 495 p.

2. Koolen, J. Distance-regular graphs with diameter 3 and eigenvalue $a_2 - c_3$ / Q. Iqbal, J. H. Koolen, J. Park, M. U. Rehman // Linear Algebra Appl. – 2020. – № 587. – P. 271–290.

3. Makhnev, A. A. On distance-regular graphs of diameter 3 with eigenvalue 0 / I. N. Belousov, A. A. Makhnev // Math. Trudy (Novosibirsk). – 2022. – № 25:2. – P. 162–173.

4. Park, J. Shilla distance-regular graphs / J. H. Koolen, J. Park // Europ. J. Comb. – 2010. – № 31. – P. 2064–2073.

5. Makhnev, A. A. Q-polynomial graph with intersection array {60,45,8;1,12,50} does not exist / V. Bitkina, A. Gutnova, A. A. Makhnev // Vestnik Perm. University. – 2023. – № 2(61). – P. 29–33.

6. Coolsaet, K. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs / K. Coolsaet, A. Jurishich // J. Comb. Theory. Series, A. – 2008. – № 115. – P. 1086–1095.

[1]Хайнаньский университет, г. Хэйкоу

[2]Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН

[3]Уральский государственный
горный университет

[4]Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Поступила в редакцию 08.11.2024