Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

П. Т. ДЫБОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ПОРЯДКА $2n$ НА ПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РОСТ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 15 IV 1971)

В работе рассматривается разрешимость равномерно эллиптического дифференциального уравнения порядка $2n$ в классе функций, растущих на бесконечности не быстрее $M|z|^{2n-2}\lg|z|$. Исследование проводится методом, предложенным И. Н. Векуа ([1a]). Метод состоит в том, что от поставленной задачи совершается переход к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по области, затем изучается разрешимость этого уравнения. Впоследствии этот метод широко применялся в работах Б. В. Боярского, В. С. Виноградова и других авторов.

На плоскости E переменного z $(z = x + iy)$ рассматривается уравнение

$$Lu \equiv L_0 u + L_1 u = f, \tag{1}$$

$$L_0 u \equiv \sum_{i+j=2n} B_{ij} \frac{\partial^{2n} u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}, \quad L_1 u \equiv \sum_{i+j=0}^{2n-1} B_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j},$$

$$B_{ij} = \bar{B}_{ji}, \quad 1 \leqslant i + j \leqslant 2n,$$

$$\partial / \partial z = {}^1/_2(\partial / \partial x - i\, \partial / \partial y), \qquad \partial / \partial \bar{z} = {}^1/_2(\partial / \partial x + i\, \partial / \partial y),$$

B_{00}, f — действительные функции. Коэффициенты при производных до $(2n-1)$-го порядка, а также B_{00} и f будем считать суммируемыми со степенью $p > 2$ в круге Γ: $x^2 + y^2 < R^2$ достаточно большого радиуса R; вне круга Γ будем считать их равными нулю, иначе $B_{ij}, f \in L_p{}^0(E)$, $p > 2$. Коэффициенты при производных порядка $2n$ полагаем функциями измеримыми, ограниченными на всей плоскости, при этом вне круга Γ: $B_{ij} \equiv 0$ при $i \neq j$ (т. е. при $i + j = 2n$, $i \neq n$). Кроме того, $B_{ij} = \sum A_{k_1} A_{m2} \ldots A_{ln}$; $k, m, \ldots, l = 0, 1, 2$; $k + m + \ldots + l = i$; $i + j = 2n$; $A_{2r} = a_r - c_r + ib_r$, $A_{1r} = 2(a_r + c_r)$, $A_{0r} = a_r - c_r - ib_r$; a_r, b_r, c_n — действительные, измеримые, ограниченные на всей плоскости функции, удовлетворяющие почти всюду условиям

$$a_r t^2 + b_r t + c_r > \Delta_0 > 0, \quad a_r > 0, \quad -\infty < t < +\infty, \quad \Delta_0 = \text{const}. \tag{2}$$

Заметим, что B_{nn} — функция вещественная, $B_{nn} > \Delta_0{}^n$.

Будем говорить, что функция $u(x, y)$ является решением задачи, если

I. $u(x, y)$ непрерывна вместе с производными до $(2n-1)$-го порядка, производные $2n$-го порядка существует в смысле С. Л. Соболева ([2]), причем $D^{2n} u \in L_p(E)$, $p > 2$;

II. На бесконечности $u(x, y)$ растет не быстрее $M|z|^{2n-2}\lg|z|$,

$$M = \text{const};$$

III. $u(x, y)$ почти везде на плоскости удовлетворяет уравнению (1).

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$u(x, y) = \iint_E \sigma(z, \zeta)\rho(\zeta)\, dE_\zeta + \mathcal{P}(x, y) \equiv S_0 \rho + \mathcal{P},$$
$$\sigma(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} |\zeta - z|^{2n-2} \lg|\zeta - z|^2, \tag{3}$$

где $\rho(\zeta)$ — искомая вещественная функция переменных ξ, η $(\zeta = \xi + i\eta)$, $\mathcal{P}$ — полином не выше $(2n-2)$-го порядка. Если $\rho \in L_p{}^0(E)$, $p > 2$, то производные по z и $\bar{z}$ от $S_0\rho$ до $(2n-1)$-го порядка существуют и определяются по формулам

$$\frac{\partial^{i+j} S_0\rho}{\partial z^i\, \partial \bar{z}^j} = \iint\limits_E \frac{\partial^{i+j}\sigma(z, \zeta)}{\partial z^i\, \partial \bar{z}^j}\, \rho(\zeta)\, dE_\zeta \equiv S_{ij}\rho, \quad i + j \leqslant 2n - 1, \tag{4}$$

при этом $S_{ij}\rho \in H_\alpha(E)$, $\alpha = (p-2)/p$ при $i + j = 2n - 1$. Если $\rho \in L_pH_\alpha(E)$, $p > 1$, то существуют производные порядка $2n$ и определяются по формулам

$$\frac{\partial^{2n} S_0\rho}{\partial z^n\, \partial \bar{z}^n} = [(n-1)!]^2\, \rho, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^{2n} S_0\rho}{\partial z^{n+m}\, \partial \bar{z}^{n-m}} = \iint\limits_E \frac{\partial^{2n}\sigma(z, \zeta)}{\partial z^{n+m}\, \partial \bar{z}^{n-m}}\, \rho(\zeta)\, dE_\zeta \equiv [(n-1)!]^2\, S_{n+m,\, n-m}\rho \equiv$$

$$\equiv [(n-1)!]^2\, \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint\limits_E \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{m-1}}{(\zeta - z)^{m+1}}\, \rho(\zeta)\, dE_\zeta, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\frac{\partial^{2n} S_0\rho}{\partial z^{n+1}\, \partial \bar{z}^{n-1}} = -[(n-1)!]^2\, \frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, dE_\zeta \equiv [(n-1)!]^2\, \Pi\rho. \tag{7}$$

Имеют место формулы, впервые полученные Ф. Трикоми ([3]):

$$S_{n+m,\, n-m}\rho = \Pi^m\rho, \quad S_{n-m,\, n+m}\rho = \bar{\Pi}^m\rho. \tag{8}$$

Если $\rho \in L_p(E)$, $p > 1$, то из общих результатов А. Зигмунда и А. Кальдерона ([4a], [6]) следует, что интегралы (6) существуют в смысле главного значения почти везде, причем

$$\left(\iint\limits_E \left| \frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{m-1}}{(\zeta - z)^{m+1}}\, \rho(\zeta)\, dE_\zeta \right|^p dE_z\right)^{1/p} \leqslant \lambda_p^{(m)} \|\rho\|_{L_p(E)}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_p^{(m)} = \lambda_p^{(m)}(p). \tag{9}$$

При этом производные порядка $2n$ существуют в смысле С. Л. Соболева и выполняются формулы (5), (6). Следовательно, операторы $S_{n+m,\, n-m}\rho$, $S_{n-m,\, n+m}\rho$ можно ([5]) продолжать линейными ограниченными операторами в любое пространство $L_p(E)$, $p > 1$, записывать их в прежней интегральной форме и в этих пространствах остаются верными формулы (5), (6).

Теорема 1. *Если функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям* I, II *и, кроме того,* $\dfrac{\partial^{2n} u}{\partial z^n\, \partial \bar{z}^n} \in L_p^0(E)$, $p > 2$, *то ее можно представить в виде* (3).

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Поскольку для $\rho \in L_p{}^0(E)$, $p > 2$,

$$\frac{1}{4^n}\, \Delta^n S_0\rho \equiv \frac{\partial^{2n} S_0\rho}{\partial z^n\, \partial \bar{z}^n} = [(n-1)!]^2\, \rho,$$

то, положив $\rho = [(n-1)!]^{-2} \dfrac{\partial^{2n} u}{\partial z^n\, \partial \bar{z}^n}$, получим $\Delta^n(u - S_0\rho) = 0$, следовательно, $u - S_0\rho = u_0$, где $u_0(x, y)$ — n-гармоническая функция на плоскости, растущая на бесконечности не быстрее $M|z|^{2n-2} \lg|z|$, $M = \mathrm{const}$. Следовательно, $u_0(x, y)$ может быть лишь полиномом не выше $(2n-2)$-й степени.

Заменяя в уравнении (1) функцию u и ее производные с помощью (3) — (6) и учитывая формулы (7), (8), для ρ получаем уравнение

$$\rho - P\rho = F, \tag{10}$$

где $\rho(\zeta)$ — искомая вещественная функция переменных ξ, η $(\zeta = \xi + i\eta)$, $\mathscr{P}$ — полином не выше $(2n-2)$-го порядка. Если $\rho \in L_p{}^0(E)$, $p > 2$, то производные по z и $\bar{z}$ от $S_0\rho$ до $(2n-1)$-го порядка существуют и определяются по формулам

$$\frac{\partial^{i+j} S_0\rho}{\partial z^i\, \partial \bar{z}^j} = \iint\limits_E \frac{\partial^{i+j}\sigma(z, \zeta)}{\partial z^i\, \partial \bar{z}^j}\, \rho(\zeta)\, dE_\zeta \equiv S_{ij}\rho, \quad i + j \leqslant 2n - 1, \tag{4}$$

при этом $S_{ij}\rho \in H_\alpha(E)$, $\alpha = (p-2)/p$ при $i + j = 2n - 1$. Если $\rho \in L_pH_\alpha(E)$, $p > 1$, то существуют производные порядка $2n$ и определяются по формулам

$$\frac{\partial^{2n} S_0\rho}{\partial z^n\, \partial \bar{z}^n} = [(n-1)!]^2 \rho, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^{2n} S_0\rho}{\partial z^{n+m}\, \partial \bar{z}^{n-m}} = \iint\limits_E \frac{\partial^{2n}\sigma(z, \zeta)}{\partial z^{n+m}\, \partial \bar{z}^{n-m}}\, \rho(\zeta)\, dE_\zeta \equiv [(n-1)!]^2 S_{n+m,\, n-m}\rho \equiv$$

$$\equiv [(n-1)!]^2 \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint\limits_E \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{m-1}}{(\zeta - z)^{m+1}}\, \rho(\zeta)\, dE_\zeta, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\frac{\partial^{2n} S_0\rho}{\partial z^{n+1}\, \partial \bar{z}^{n-1}} = -[(n-1)!]^2 \frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, dE_\zeta \equiv [(n-1)!]^2\, \Pi\rho. \tag{7}$$

Имеют место формулы, впервые полученные Ф. Трикоми ([3]):

$$S_{n+m,\, n-m}\rho = \Pi^m\rho, \quad S_{n-m,\, n+m}\rho = \bar{\Pi}^m\rho. \tag{8}$$

Если $\rho \in L_p(E)$, $p > 1$, то из общих результатов А. Зигмунда и А. Кальдерона ([4а], [6]) следует, что интегралы (6) существуют в смысле главного значения почти везде, причем

$$\left(\iint\limits_E \left| \frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{m-1}}{(\zeta - z)^{m+1}}\, \rho(\zeta)\, dE_\zeta \right|^p dE_z\right)^{1/p} \leqslant \lambda_p^{(m)} \|\rho\|_{L_p(E)}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_p^{(m)} = \lambda_p^{(m)}(p). \tag{9}$$

При этом производные порядка $2n$ существуют в смысле С. Л. Соболева и выполняются формулы (5), (6). Следовательно, операторы $S_{n+m,\, n-m}\rho$, $S_{n-m,\, n+m}\rho$ можно ([5]) продолжать линейными ограниченными операторами в любое пространство $L_p(E)$, $p > 1$, записывать их в прежней интегральной форме и в этих пространствах остаются верными формулы (5), (6).

Теорема 1. *Если функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям* I, II *и, кроме того,* $\frac{\partial^{2n} u}{\partial z^n\, \partial \bar{z}^n} \in L_p^0(E)$, $p > 2$, *то ее можно представить в виде* (3).

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Поскольку для $\rho \in L_p{}^0(E)$, $p > 2$,

$$\frac{1}{4^n} \Delta^n S_0\rho \equiv \frac{\partial^{2n} S_0\rho}{\partial z^n\, \partial \bar{z}^n} = [(n-1)!]^2 \rho,$$

то, положив $\rho = [(n-1)!]^{-2} \frac{\partial^{2n} u}{\partial z^n\, \partial \bar{z}^n}$, получим $\Delta^n(u - S_0\rho) = 0$, следовательно, $u - S_0\rho = u_0$, где $u_0(x, y)$ — n-гармоническая функция на плоскости, растущая на бесконечности не быстрее $M|z|^{2n-2} \lg|z|$, $M = \text{const}$. Следовательно, $u_0(x, y)$ может быть лишь полиномом не выше $(2n-2)$-й степени.

Заменяя в уравнении (1) функцию u и ее производные с помощью (3) — (6) и учитывая формулы (7), (8), для ρ получаем уравнение

$$\rho - P\rho = F, \tag{10}$$

где $P\rho \equiv P_0\rho + T\rho$, $P_0\rho \equiv -\sum_{m=1}^{n} (B_{n+m,\, n-m}\Pi^m\rho + B_{n-m,\, n+m}\overline{\Pi}^m\rho)$,

$$T\rho \equiv -[(n-1)!]^{-2} \sum_{i+j=0}^{2n-1} B_{ij}S_{ij}\rho, \quad F \equiv [(n-1)!]^{-2}(f - L\mathscr{P}).$$

$P_0\rho$ — линейный ограниченный оператор, переводящий любое пространство $L_p(E)$, $p > 1$, в себя. Пространство $L_p^0(E)$, $p > 1$, оператор $P_0\rho$ переводит в $L_p^0(E)$. $T\rho$ — вполне непрерывный оператор в любом $L_p^0(E)$, $p > 2$. Пространства $L_p^0(E)$, $p > 2$, оператор $P\rho$ переводит в себя. Пусть $\rho \in L_p^0(E)$, $p > 2$. Применяя неравенство Минковского, учитывая (9) и неравенства $|S_{ij}\rho|_{z\in\Gamma} \leqslant N_{ij}\|\rho\|_{L_p^0(E)}$, $N_{ij} = N_{ij}(R)$, получаем оценки

$$\|P_0\rho\|_{L_p^0(E)} \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{z\in\Gamma} 2\sum_{m=1}^{n} |B_{n+m,\, n-m}|\lambda_p^{(m)}\|\rho\|_{L_p^0(E)}, \tag{11}$$

$$\|T\rho\|_{L_p^0(E)} \leqslant \sum_{i+j=0}^{2n-1} N_{ij}\|B_{ij}\|_{L_p^0(E)}\|\rho\|_{L_p^0(E)}. \tag{12}$$

Пусть ρ_1, ρ_2 — произвольные элементы пространства $L_p^0(E)$, $p > 2$. На основании (11), (12), для этих элементов выполняется неравенство

$$\|P\rho_1 - P\rho_2\|_{L_p^0(E)} \leqslant q\|\rho_1 - \rho_2\|_{L_p^0(E)},$$

$$q = \operatorname*{vrai\,sup}_{z\in\Gamma} 2\sum_{m=1}^{n} |B_{n+m,\, n-m}|\lambda_p^{(m)} + \sum_{i+j=0}^{2n-1} N_{ij}\|B_{ij}\|_{L_p^0(E)}. \tag{13}$$

Если $q < 1$, то к функциональному уравнению (10) применим принцип сжатых отображений; оно имеет единственное решение для любой правой части $F \in L_p^0(E)$. Если в формуле (3) взять два различных полинома, то получим два решения, разность которых будет решением уравнения $Lu = 0$. Но при $q < 1$ таким решением может быть лишь полином не выше $(2n-2)$-го порядка.

Теорема 2. *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (2) *и неравенству* $q < 1$ (q *определяется формулой* (13)), *то поставленная задача разрешима для любого* $f \in L_p^0(E)$, $p > 2$, *ее решение можно представить в виде* $S_0\rho + \mathscr{P}$, *где* $S_0\rho$ — *частное решение уравнения* $Lu = f$, *а* $\mathscr{P}$ — *полином не выше* $(2n-2)$-*го порядка, удовлетворяющий уравнению* $Lu = 0$, *при этом, если* $B_{ij} \equiv 0$ *для всех* i, j, $0 \leqslant i + j \leqslant 2n - 2$, *то* $\mathscr{P}$ — *произвольный полином* $(2n-2)$-*го порядка.*

Рассмотрим более общее уравнение, считая B_{ij}, $0 \leqslant i + j \leqslant 2n - 1$, произвольными функциями из $L_p^0(E)$, $p > 2$. Поскольку λ_p^m непрерывно зависят от p [6], при этом $\lambda_2^{(1)} = 1$ [1б], а следовательно, $\lambda_2^{(m)} = 1$ и для $m = 2, \ldots, n$, то для значений p, близких к двум, $\lambda_p^{(m)}$ близки к единице. Поэтому, если коэффициенты при старших производных уравнения (1) удовлетворяют неравенству

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{z\in\Gamma} 2\sum_{m=1}^{n} |B_{n+m,\, n-m}| < 1, \tag{14}$$

то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для значений p, $2 < p < 2 + \varepsilon$, будет выполняться неравенство $\|P_0\|_{L_p^0(E)} < 1$, оператор $I - P_0$ имеет обратный $P_* = (I - P_0)^{-1}$ [5], который также линеен и ограничен в $L_p^0(E)$, $2 < p < 2 + \varepsilon$. Применив оператор P_* к уравнению (10) переходим к эквивалентному функциональному уравнению $\rho - T_*\rho = P_*F$ с вполне непрерывным [7] оператором $T_* = P_*T$; для такого уравнения согласно теории Рисса — Шаудера [7, 8] справедливы теоремы Фредгольма. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — функционалы, являющиеся решениями однородного сопряженного уравнения. Тогда для разрешимости уравнения (10) необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$f_k(f - L\mathscr{P}) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Так как уравнение $\rho - P\rho = -[(n-1)!]^{-2}L\mathscr{P}$ всегда разрешимо, то $f_k(L\mathscr{P}) = 0$, поэтому условия (15) эквивалентны условиям

$$f_k(f) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{16}$$

где m — число линейно независимых решений уравнения $\rho - P\rho = 0$. Если в формуле (3) взять два разных полинома, то получим два решения, разность которых будет решением уравнения $Lu = 0$. Поэтому по существу, они будут отличаться лишь на полином не выше $(2n-2)$-го порядка, удовлетворяющий уравнению $Lu = 0$. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если коэффициенты L_0u удовлетворяют неравенству (14) и почти всюду удовлетворяют условиям (2), то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для значений p, $2 < p < 2 + \varepsilon$, рассматриваемая задача разрешима тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (16), где m — число линейно независимых решений уравнения $\rho - P\rho = 0$ (т. е. число линейно независимых решений уравнения $Lu = 0$, представляемых в виде $S_0\rho$). Решение задачи можно искать в виде $S_0\rho + \mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — полином не выше $(2n-2)$-го порядка, удовлетворяющий уравнению $Lu = 0$.*

Сделанные выводы о разрешимости рассматриваемой задачи опираются на неравенство $\|P_0\|_{L_p^0(E)} < 1$. В общем случае из условий (2) не следует выполнения этого неравенства ([9]). В общем случае мы предполагаем, что коэффициенты при старших производных — функции непрерывные на всей плоскости; f, $B_{ij} \in L_p{}^0(E)$, $p > 2$, $0 \leqslant i + j \leqslant 2n - 1$. Рассматриваем символ уравнения (10). Доказываем, что символ непрерывен и его точная нижняя грань больше нуля. Поэтому, согласно теории, разработанной С. Г. Михлиным ([10]), сингулярное интегральное уравнение (10) допускает эквивалентную регуляризацию. Поэтому справедлива

Теорема 4. *Если коэффициенты L_0u — функции непрерывные, удовлетворяют всюду на плоскости условиям (2); f, $B_{ij} \in L_p{}^0(E)$, $p > 2$, $0 < i + j \leqslant 2n - 1$, то рассматриваемая задача разрешима тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (16), где m — число линейно независимых решений уравнения $\rho - P\rho = 0$. Решение задачи можно искать в виде $S_0\rho + \mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — полином не выше $(2n-2)$-го порядка, удовлетворяющий уравнению $Lu = 0$.*

Теорема 5. *Если коэффициенты при старших производных уравнения (1) измеримые (вообще, неограниченные) функции, удовлетворяющие почти всюду на плоскости условиям (2), то делением на функцию $\prod_1^n (a_r + c_r)$ это уравнение приводится к равномерно эллиптическому уравнению, с коэффициентами при старших производных, ограниченными на всей плоскости.*

Заметим, что доказательство теоремы для уравнения второго порядка содержится в работе ([1a]) (или ([1б])).

Выражаю искреннюю благодарность акад. И. Н. Векуа за постановку задачи и внимание к работе.

Московский инженерно-физический институт

Поступило 31 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа а) ДАН, **101**, № 4, 593 (1955); б) Обобщенные аналитические функции, М., 1959; в) Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948; г) Матем. сборн. **31(73)**, 2, 217 (1952). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950. [3] F. Tricomi, Math. Zs., 27, 87 (1928). [4] A. Calderon, A. Zygmund, a) Acta Math., 88, 85 (1952); б) Am. J. Math., 78, 289 (1956). [5] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937. [6] M. Riesz, Acta Math., 49, 465 (1926). [7] Ф. Рисс, УМН, в. 1, 175 (1936). [8] J. Schauder, Studia Math., **11**, 183 (1930). [9] П. Т. Дыбов, ДАН, **199**, № 4, 754 (1971). [10] С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962.