

В. Я. ЛИН

## АЛГЕБРОИДНЫЕ ФУНКЦИИ И ГОЛОМОРФНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП КОМПЛЕКСНОГО МНОГООБРАЗИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 19 IV 1971)

1. Полином от одной переменной  $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  над коммутативным кольцом  $A$  с единицей будем называть сепарабельным, если его дискриминант  $d_p$  является обратимым элементом кольца  $A$ . Совокупность всех сепарабельных полиномов над  $A$  обозначим  $\mathfrak{A}(A)$ , а ее часть, состоящую из полиномов степени  $n$ , обозначим  $\mathfrak{A}_n(A)$ . Скажем, что полином  $p \in \mathfrak{A}(A)$  вполне приводим, если он разлагается над  $A$  на линейные множители.

Пусть  $M$  — связное комплексное многообразие и  $A(M)$  — алгебра всех голоморфных функций на  $M$ . Наша цель состоит в отыскании условий, обеспечивающих полную приводимость всех полиномов класса  $\mathfrak{A}_n(A(M))$ . Полином  $p \in \mathfrak{A}_n(A(M))$  определяет  $n$ -значную алгеброидную функцию на  $M$  (решение уравнения  $p(\lambda) = 0$ ), не имеющую на  $M$  особых точек; если полином  $p$  вполне приводим, то соответствующая алгеброидная функция распадается на  $n$  однозначных ветвей.

В работе <sup>(1)</sup> показано, что полная приводимость всех сепарабельных полиномов степени  $n$  над алгеброй  $C(M)$  всех комплексных непрерывных функций на  $M$  равносильна отсутствию нетривиальных гомоморфизмов фундаментальной группы многообразия  $M$  в группу кос Артина  $B(n)$ . Конечно, если последнее условие выполнено, то любой полином  $p \in \mathfrak{A}_n(A(M))$  вполне приводим над  $C(M)$ , а потому и над  $A(M)$ . Однако, поскольку полиномов с голоморфными коэффициентами «меньше», чем с непрерывными, естественно ожидать, что в интересующем нас сейчас случае это условие можно ослабить. Мы предлагаем подход к этой задаче, основанный на вводимом ниже понятии голоморфных элементов гомотопической группы комплексного многообразия (при изучении алгеброидных функций нам понадобятся голоморфные элементы лишь фундаментальной группы, но в других ситуациях могут оказаться полезными голоморфные элементы старших гомотопических групп).

2. Пусть  $C^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) — комплексное линейное пространство с координатами  $z_1, \dots, z_{n+1}$ , а  $R^{n+1}$  — вещественное подпространство в  $C^{n+1}$ . Рассмотрим квадрику  $\Sigma^n = \{z | z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1\}$ ; ясно, что  $\Sigma^n$  — неособое алгебраическое подмногообразие в  $C^{n+1}$ . Пересечение  $S^n = \Sigma^n \cap R^{n+1}$  есть стандартная  $n$ -мерная сфера; легко видеть, что  $S^n$  — деформационный ретракт в  $\Sigma^n$ . Фиксируем в  $\Sigma^n$  точку  $z_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . Пусть  $M$  — комплексное многообразие,  $\zeta_0 \in M$ . Элементы гомотопической группы  $\pi_n(M, \zeta_0)$  можно рассматривать как гомотопические классы непрерывных отображений пары  $(\Sigma^n, z_0)$  в пару  $(M, \zeta_0)$ . Назовем элемент  $\gamma \in \pi_n(M, \zeta_0)$  голоморфным, если найдется голоморфное отображение  $h: \Sigma^n \rightarrow M$ , гомотопное какому-нибудь (и, значит, любому) отображению класса  $\gamma$  (при этом не требуется, чтобы  $h(z_0) = \zeta_0$ ). Множество всех голоморфных элементов группы  $\pi_n(M, \zeta_0)$  обозначим  $\text{hol}_n(M, \zeta_0)$ ; оно не является, вообще говоря, подгруппой; порожденную им подгруппу обозначим  $\text{Hol}_n(M, \zeta_0)$ . Из одной теоремы Рамшпота <sup>(2)</sup> следует, что если  $M$  —

однородное комплексное многообразие (т. е. на  $M$  голоморфно и транзитивно действует комплексная группа Ли), то  $\pi_n(M, \zeta_0) = \text{hol}_n(M, \zeta_0)$  для всех  $n$ . В частности, на  $\Sigma^k$  голоморфно и транзитивно действует комплексная ортогональная группа  $O(k+1, \mathbb{C})$ , так что  $\text{hol}_n(\Sigma^k, z_0) = \pi_n(\Sigma^k, z_0) (\approx \pi_n(S^k))$  для любых  $n, k$ . Отсюда легко следует, что множество  $\text{hol}_n(M, \zeta_0)$  вместе с каждым входящим в него элементом содержит порожденную им циклическую подгруппу группы  $\pi_n(M, \zeta_0)$ . Если  $\mu(t)$  — путь в  $M$ , соединяющий точки  $\zeta_2, \zeta_1$ , и  $\mu_n: \pi_n(M, \zeta_1) \rightarrow \pi_n(M, \zeta_2)$  — индуцированный им изоморфизм, то  $\mu_n(\text{hol}_n(M, \zeta_1)) = \text{hol}_n(M, \zeta_2)$ . Отсюда следует, что  $\text{Hol}_1(M, \zeta_0)$  — нормальный делитель группы  $\pi_1(M, \zeta_0)$ . Наконец, если  $f: M \rightarrow M'$  — голоморфное отображение комплексных многообразий и  $f_{*n}: \pi_n(M, \zeta_0) \rightarrow \pi_n(M', f(\zeta_0))$  — индуцированный гомоморфизм, то  $f_{*n}(\text{hol}_n(M, \zeta_0)) \subset \text{hol}_n(M', f(\zeta_0))$ .

3. Обозначим через  $G_n$  множество всех сепарабельных полиномов степени  $n$  над полем комплексных чисел, а через  $G'_n$  — подмножество  $G_n$ , состоящее из всех полиномов с дискриминантом 1. Легко видеть, что  $G_n$  и  $G'_n$  — комплексные многообразия Штейна. Для комплексного многообразия  $M$  класс полиномов  $\mathfrak{A}_n(A(M))$  естественно отождествляется с множеством всех голоморфных отображений  $M$  в  $G_n$ . Назовем связное комплексное многообразие лиувиллевским (пикаровским), если на нем нет непостоянных ограниченных (не принимающих двух значений) голоморфных функций. Скажем, что комплексное многообразие принадлежит классу  $\mathcal{L}$ , если его универсальное накрывающее многообразие является лиувилевским. Обозначим через  $A^{-1}(M)$  мультипликативную группу всех обратимых элементов из  $A(M)$ , а через  $\exp(A(M))$  — ее подгруппу, состоящую из всех функций вида  $\exp(f)$ , где  $f \in A(M)$ .

Теорема 1. Пусть  $M \in \mathcal{L}$ ,  $p \in \mathfrak{A}_n(A(M))$ ,  $d$  — дискриминант  $p$ . Тогда

$$p(\lambda, \zeta) = (\lambda + a(\zeta))^n + \sum_{k=2}^n c_k d(\zeta)^{\frac{k}{n(n-1)}} (\lambda + a(\zeta))^{n-k},$$

где  $a \in A(M)$ ,  $a, c_2, \dots, c_n$  — такие постоянные, что  $c_k = 0$  для тех значений индекса  $k$ , для которых функция  $d(\zeta)^{k/(n(n-1))}$  не допускает выделения однозначной голоморфной ветви на  $M$ .

Теорема 2. Всякое голоморфное отображение многообразия  $M \in \mathcal{L}$  в  $G_n$  гомотопно (в классе голоморфных отображений) либо отображению вида  $f_a(\zeta) = \lambda^n + a(\zeta)$ , либо отображению вида  $g_a(\zeta) = \lambda^n + a(\zeta)\lambda$  ( $a \in A^{-1}(M)$ ). Голоморфные отображения  $p, q: M \rightarrow G_n$  гомотопны тогда и только тогда, когда  $d_p d_q^{-1} \in \exp(A(M))$ . В частности,  $f_{a_1} \sim f_{a_2}$  ( $g_{a_1} \sim g_{a_2}$ ) равносильно  $a_1 a_2^{-1} \in \exp(A(M))$ , а  $f_{a_1} \sim g_{a_2}$  равносильно  $a_1^{n-1} a_2^{-n} \in \exp(A(M))$ .

Замечание. Условие  $M \in \mathcal{L}$  в теоремах 1 и 2 можно несколько ослабить: достаточно предполагать, что все неразветвленные конечнолистные накрывающие многообразия  $M$  являются пикаровскими.

Квадрика  $\Sigma^k \in \mathcal{L}$  (универсальным накрывающим для  $\Sigma^1$  служит  $\mathbb{C}^1$ , а для  $k > 1$  квадрика  $\Sigma^k$  является односвязным алгебраическим многообразием). Применим теорему 2 для классификации отображений  $\Sigma^k$  в  $G_n$ . Для  $k > 1$  из этой теоремы следует, что любое голоморфное отображение  $f: \Sigma^k \rightarrow G_n$  стягиваемо в классе голоморфных отображений (известно, что  $\pi_k(G_n) = 0$  при  $k > 1$ , однако отсюда следует лишь стягиваемость  $f$  в классе непрерывных отображений). Квадрика  $\Sigma^1$  биголоморфно эквивалентна проколотой в нуле комплексной прямой:  $\Sigma^1 \approx C_0^1 = \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$ . Применяя теорему 2 в этой ситуации, получаем, что голоморфное отображение  $C_0^1$  в  $G_n$  гомотопно одному из отображений  $f_k(\zeta) = \lambda^n + \zeta^k$ ,  $g_l(\zeta) = \lambda^n + \zeta^l \lambda$  ( $k$  и  $l$  — целые), причем  $f_k \sim g_l$  равносильно условию  $k(n-1) = ln$ . Это позволяет описать голоморфные элементы группы  $\pi_1(G_n)$ .

Известно <sup>(3)</sup>, что  $\pi_1(G_n) \approx B(n)$ ; кроме того <sup>(1)</sup>,  $\pi_1(G_n') \approx B'(n)$  ( $B'(n)$  — коммутант  $B(n)$ ), причем вложение  $G_n' \subset G_n$  индуцирует естественное вложение  $B'(n) \subset B(n)$ . Группу  $B(n)$  можно задать двумя образующими  $a, b$ , связанными определяющей системой соотношений <sup>(4)</sup>  $a^n = b^{n-1}$ ,  $ba^{k-1}b = a^kba^{-(k+1)}ba^k$  ( $2 \leq k \leq [n/2]$ ); такую систему образующих будем называть специальной. Выберем число  $c$  так, чтобы дискриминант полинома  $\lambda^n + c$  равнялся 1, и пусть  $\zeta_0$  — точка в  $G_n$ , отвечающая этому полиному.

**Теорема 3.** В группе  $\pi_1(G_n, \zeta_0) \approx B(n)$  можно так выбрать специальные образующие  $a, b$ , что голоморфными будут все элементы  $aa^k a^{-1}$ ,  $\beta b' \beta^{-1}$  ( $a, \beta \in \pi_1(G_n, \zeta_0)$ ,  $k$  и  $l$  — любые целые числа) и только они; в частности,  $\text{Hol}_1(G_n, \zeta_0) = \pi_1(G_n, \zeta_0)$ . В группе  $\pi_1(G_n', \zeta_0)$  ни один элемент, кроме 1, не является голоморфным.

4. Используя результаты предыдущего пункта, можно получить достаточные условия полной приводимости полиномов класса  $\mathfrak{A}_n(A(M))$ .

**Теорема 4.** Если фактор-группа  $\pi_1(M, \zeta_0) / \text{Hol}_1(M, \zeta_0)$  не имеет тривиальных гомоморфизмов в  $B(n)$ , то вполне приводим любой полином  $p \in \mathfrak{A}_n(A(M))$ , дискриминант которого представим в виде  $a(\zeta)^{n(n-1)} (a \in A^{-1}(M))$  (если  $H^1(M, \mathbb{Z}) = 0$ , то последнему условию удовлетворяет любой сепарабельный полином над  $A(M)$ ).

**Теорема 5.** Если  $M$  — однородное комплексное многообразие или многообразие класса  $\mathcal{L}$ , то для полной приводимости всех полиномов класса  $\mathfrak{A}(A(M))$  достаточно (а если  $M$  — штейново, то и необходимо), чтобы  $H^1(M, \mathbb{Z}) = 0$ .

5. Здесь устанавливается, что указанные в теореме 4 достаточные условия полной приводимости всех сепарабельных полиномов над  $A(M)$  существенно слабее, чем цитированное в пункте 1 необходимое и достаточное условие полной приводимости всех сепарабельных полиномов степени  $n$  над  $C(M)$  (ср. <sup>(5)</sup>).

**Теорема 6.** Пусть  $G$  — конечно определенная группа. Тогда существует такое многообразие Штейна  $M$  с отмеченной точкой  $\zeta_0$ , что  $\pi_1(M, \zeta_0) \approx G$  и  $\text{Hol}_1(M, \zeta_0) = \pi_1(M, \zeta_0)$ .

**Следствие.** Существует многообразие Штейна  $M$  с отмеченной точкой  $\zeta_0$ , обладающее следующими свойствами:

а)  $H^1(M, \mathbb{Z}) = 0$  и  $\text{Hol}_1(M, \zeta_0) = \pi_1(M, \zeta_0)$ , так что любой сепарабельный полином над  $A(M)$  вполне приводим;

б) некоторый сепарабельный полином пятой степени над алгеброй  $C(M)$  неприводим.

Существенно, что в этих предложениях речь идет о многообразиях Штейна: если отказаться от голоморфной выпуклости  $M$ , то теорема 6 становится тривиальной, а следствие легко выводится из теоремы 3.2 <sup>(1)</sup>.

6. В этом пункте мы определяем неразветвленные алгебраические и неразветвленные радикальные расширения алгебры  $A(M)$  и приводим некоторые результаты, связанные с этими понятиями; с очевидными изменениями наши определения применимы и в случае алгебры  $C(X)$ , где  $X$  — связное нормальное топологическое пространство; вариант конструкции, пригодный для любой коммутативной банаховой алгебры со связным пространством максимальных идеалов, будет изложен в другой работе.

Пусть  $q \in \mathfrak{A}_k(A(M))$ . Рассмотрим в  $M \times C^k$  подмногообразие  $\{(\zeta; (\mu_1, \dots, \mu_k)) \in M \times C^k \mid q(\lambda, \zeta) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \mu_i)\}$ ; пусть  $M_q$  — одна из

его связных компонент (какая именно, для дальнейшего безразлично, ибо все они биголоморфно эквивалентны). Естественная проекция  $\tau: M_q \rightarrow M$  является неразветвленным регулярным конечнолиственным голоморфным накрытием и индуцирует вложение  $A(M) \subset A(M_q)$ . Алгебру  $A(M_q)$  назовем неразветвленным алгебраическим расширением алгебры  $A(M)$ , порожденным полиномом  $q$ . Любая функция  $f \in A(M_q)$

представима в виде полинома от  $\mu_1, \dots, \mu_k$  степени  $< k$  по каждой переменной с коэффициентами из алгебры  $A(M)$ . Полином  $q$  вполне приводим над  $A(M_q)$ , и  $A(M_q)$  — минимальное неразветвленное алгебраическое расширение алгебры  $A(M)$ , обладающее этим свойством. Расширение  $A(M_q)$  нормально, т. е. неприводимый над  $A(M)$  полином из  $\mathfrak{A}(A(M))$ , имеющий в  $A(M_q)$  хотя бы один корень, вполне приводим над  $A(M_q)$ . Таким образом, расширение  $A(M_q)$  играет роль «минимальной алгебры разложения» полинома  $q$ . Его группа Галуа (т. е. группа всех автоморфизмов алгебры  $A(M_q)$ , тождественных на  $A(M)$ ), изоморфна факторгруппе  $\pi_1(M, \tau(\xi_0)) / \tau_*(\pi_1(M_q, \xi_0))$  и может быть изоморфно вложена в симметрическую группу  $S(k)$ .

Расширение  $A(M_q)$ , порожденное сепарабельным двучленным полиномом  $q = \lambda^k - a(\xi)$ , назовем простым неразветвленным радикальным расширением алгебры  $A(M)$ . Если  $A(M) = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_m$  — конечная цепочка расширений, причем  $A_{i+1}$  — простое неразветвленное радикальное расширение алгебры  $A_i$  ( $0 \leq i < m$ ), то алгебру  $A_m$  назовем неразветвленным радикальным расширением алгебры  $A(M)$ . Скажем, что полином  $p \in \mathfrak{A}(A(M))$  вполне приводим в неразветвленных радикалах, если он вполне приводим в некотором неразветвленном радикальном расширении алгебры  $A(M)$ .

**Теорема 7.** Если  $M$  — многообразие Штейна и каждый элемент коммутанта группы  $\pi_1(M, \xi_0)$  голоморфен, то любой полином  $p \in \mathfrak{A}(A(M))$  вполне приводим в неразветвленных радикалах.

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — естественные координаты в многообразии  $G_n$  всех сепарабельных полиномов степени  $n$  над полем  $C^1$ ; полином  $u_n = \lambda^n + \xi_1 \lambda^{n-1} + \dots + \xi_n \in \mathfrak{A}_n(A(G_n))$  назовем универсальным сепарабельным полиномом степени  $n$ . Если полином  $p \in \mathfrak{A}(A(M))$  вполне приводим в неразветвленных радикалах, то его группа Галуа (т. е. группа Галуа расширения  $A(M_p)$ ) разрешима. Группа Галуа универсального сепарабельного полинома  $u_n$  есть  $S(n)$ , так что для  $n \leq 4$  она разрешима. Тем не менее, справедлива

**Теорема 8.** Полином  $u_k$  неприводим над любым неразветвленным радикальным расширением алгебры  $A(G_k)$ .

Полная приводимость в неразветвленных радикалах полинома  $p \in \mathfrak{A}_n(A(M))$  зависит не столько от его группы Галуа, сколько от свойств индуцированного им гомоморфизма группы  $\pi_1(M)$  в группу  $B(n)$ . Что касается полинома  $u_3$ , то можно показать, что соответствующее ему неразветвленное расширение  $A((G_3)_{u_3})$  алгебры  $A(G_3)$  не является неразветвленным радикальным расширением. Однако, как доказал Ю. В. Зюзин, полином  $u_3$  вполне приводим в неразветвленных радикалах.

Центральный экономико-математический институт  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
3 IV 1971

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Е. А. Горин, В. Я. Лин, Матем. сборн., 78 (120), 4 (1969). <sup>2</sup> K. J. Ranspott, Sitzungsber. d. Math. Naturwiss., K1 (1962). <sup>3</sup> В. И. Арнольд, УМН, 23, в. 4 (1968). <sup>4</sup> Ф. Клейн, Высшая геометрия, 1939. <sup>5</sup> Е. А. Горин, ДАН, 200, № 2 (1971).