

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

И. К. ЛИФАНОВ

ВЛОЖЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОКРУЖНОСТНО ПОДОБНЫХ КONTИНУУМОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 5 IV 1971)

Компакт K^1 называется окружностно подобным, если он является пределом счетного обратного спектра из окружностей.

Рассмотрим в $(n+2)$ -мерном евклидовом пространстве R^{n+2} открытое множество $E^{n+2} = I \times S_1^1 \times \dots \times S_{n+1}^1$, где I — интервал $(0, 2)$, S_i^1 — окружность единичного радиуса, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Во множестве E^{n+2} можно ввести координаты $r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$, где $0 < r < 2$, $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$, $i = 1, \dots, n+1$, и тогда это множество опишется так: $E^{n+2} = \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1})\}$. Метрику во множестве E^{n+2} введем следующим образом: на окружности S_i^1 , $i = 1, \dots, n+1$, расстояние между двумя точками равно минимальной длине дуги, соединяющей эти точки, на интервале $(0, 2)$ — обычная метрика, а на множестве E^{n+2} — как в произведении метрических пространств. Пусть $E^{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, 0, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_{n+1})\}$, где

$0 < r < 2$; $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$, $i = 1, \dots, n$; $0 \leq \varphi_{n+1} < \pi/2$. Пространство E^{n+1} является локально компактным и $\dim E^{n+1} = n+1$. Доказывается

Теорема. Любой континуум K^n , являющийся топологическим произведением n окружностно подобных континуумов, вкладывается в пространство E^{n+1} .

При $n = 1$ получается результат Бинга ⁽¹⁾ о вложении любого окружностно подобного континуума.

1. Определение 1. (Маккорд ⁽²⁾). Если (X, ρ) и (X', ρ') — компакты, а $f: X \rightarrow X'$ отображение*, то для любого $\varepsilon > 0$ полагаем $M(f, \varepsilon) = \sup \{\delta: \text{из } \rho(x, y) < \delta, x, y \in X, \text{ имеем } \rho'(f(x), f(y)) < \varepsilon\}$. Заметим, что $M(f, \varepsilon) > 0$, так как отображение равномерно непрерывно.

Лемма. (Избелл ⁽³⁾). Пусть X_∞ является пределом обратного спектра (X_n, f_m^n) , элементами которого являются компакты X_n с метрикой ρ_n .

Тогда существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел, которая обладает следующим свойством. Предположим, что (E, ρ) — полное метрическое пространство и для каждого n существует вложение $h_n: X_n \rightarrow E$, удовлетворяющее условию $d(h_m f_m^n, f_n) < \delta_m$ при $m < n$, где $\delta_m = \min \{M(h_m^{-1}, \varepsilon_m) / 3, 1/m\}$. Тогда компакт X_∞ вкладывается в E .

Определение 2. Пусть E является локально компактным метрическим пространством и f является отображением компакта $X \subseteq E$ в E . Тогда отображение f называется аппроксимируемым гомеоморфизмами со скольжением, если: 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой гомеоморфизм h компакта X в E , что $d(h, f) < \varepsilon$, и 2) существует такая окрестность U компакта X и такое ее взаимно однозначное отображение g в E , что $g^{-1}h(X) = X$.

Теорема 1. Пусть E является локально компактным метрическим пространством и в нем дана система компактов X_n , $n = 1, 2, \dots$. Пусть проекции спектра (X_n, f_m^n) таковы, что для любого гомеоморфизма η_n

* Под отображением всегда понимаем непрерывное отображение.

компакта X_n на себя отображение $\eta_n f_n^{n+1}$ аппроксимируется гомеоморфизмами со скольжением.

Тогда предел X_∞ этого спектра вкладывается в пространство E .

Доказательство. Для требуемой в лемме Избелла последовательности положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ построим соответствующие вложения h_n компактов X_n в E . Для каждого n построим последовательность отображений $\bar{f}_{n-1}^n, \bar{h}_n, g_n, h_n$, окрестностей U_n и положительных чисел δ_n, α_n , удовлетворяющих условиям $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$ и J_n :

A_n) $\bar{f}_{n-1}^n = g_{n-1}^{-1} \bar{h}_{n-1} f_{n-1}^n$ ($n \geq 2$) отображение X_n на X_{n-1} , т. е. $g_{n-1} \bar{f}_{n-1}^n = \bar{h}_{n-1} f_{n-1}^n$;

B_n) $\bar{h}_n: X_n \rightarrow E$ — вложение;

C_n) $X_n \subset U_n$, где U_n открыто и $g_n: U \rightarrow E$ — равномерно непрерывное взаимно однозначное отображение, $g_n^{-1} \bar{h}_n(x_n) = X_n, \chi_n = \rho(X_n, E - U_n)$.

D_n) Число α_n такое, что из $\rho(x_n', x_n'') < \alpha(x_n', x_n'' \in U_n)$ следует $\rho(g_1 \dots g_n(x_n'), g_1 \dots g_n(x_n'')) < \min(2^{m-n-1} \delta_m, 1 \leq m \leq n)$.

E_n) $\rho(\bar{h}_n(x), \bar{f}_{n-1}^n) < \min(\alpha_{n-1}, \chi_{n-1})$ для любого $x \in X_n, n \geq 2$.

F_n) $\delta_n = \min(M(\bar{h}_n^{-1}, \varepsilon_n)/3, 1/n)$.

J_n) $h_n = g_1 \dots g_{n-1} \bar{h}_n$ — вложение компакта X_n в E_n .

Следствие 1. При этом получается $d(h_{n-1} f_{n-1}^n, h_n) < \min(2^{m-n} \delta_m, m \leq n)$.

Действительно, $d(h_n, h_{n-1} f_{n-1}^n) = d(g_1 \dots g_{n-1} \bar{h}_n, g_1 \dots g_{n-2} \bar{h}_{n-1} f_{n-1}^n) = d(g_1 \dots g_{n-1} \bar{h}_n, g_1 \dots g_{n-2} g_{n-1} \bar{f}_{n-1}^n) < (\text{см. } E_n \text{ и } D_{n-1}) < \min(2^{m-n} \delta_m; 1 \leq m \leq n)$.

Заметим теперь, что следствие 1 можно записать так: $d(h_j f_j^{i+1}, h_{j+1}) < 2^{m-j-1} \delta_m$, где $1 \leq m \leq j$, m и j произвольны. Предположим, что $1 \leq m \leq n$. Тогда

$$\begin{aligned} d(h_m f_m^n, h_n) &\leq \sum_{j=m}^{n-1} d(h_j f_j^n, h_{j+1} f_{j+1}^n) = \sum_{j=m}^{n-1} d(h_j f_j^{j+1} f_{j+1}^n, h_{j+1} f_{j+1}^n) = \\ &= \sum_{j=m}^n d(h_j f_j^{j+1}, h_{j+1}) \leq \sum_{j=m}^{n-1} 2^{m-j-1} \delta_m < \delta_m \sum_{j=m}^{\infty} 2^{m-j-1} = \delta_m. \end{aligned}$$

Это и доказывает нашу теорему.

2. В этом пункте докажем, что любой окружностно подобный континуум вкладывается в пространство $E^{1+1} = \{(r, \varphi_1, 0)\} \cup \{(r, 0, \varphi_2)\}$, где $0 < r < 2, 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, 0 \leq \varphi_2 < \pi/2$. Для этого вложим окружность S^1 в пространство E^{1+1} так: $S^1 = \{(1, \varphi_1, 0)\}, 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$. Назовем такое вложение окружности S^1 в E^{1+1} правильным.

Лемма 1. Пусть окружность S^1 правильно вложена в пространство E^{1+1} . Тогда любое ее отображение на себя аппроксимируется гомеоморфизмами со скольжением.

Доказательство. 1) Пусть f — отображение окружности S^1 на себя, $f(1, \varphi_1, 0) = (1, f(\varphi_1), 0), (f(1, 0, 0) = f(1, 2\pi, 0))$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую достаточно мелкую триангуляцию S^1 и ее кусочно линейное симплициальное отображение $g, g(1, \varphi_1, 0) = (1, g(\varphi_1), 0)$, что

$$d(g, f) < \varepsilon/4. \quad (1)$$

Пусть $\varphi_1^0, \dots, \varphi_1^k$ — точки прообраза нуля окружности, при отображении g , перенумерованные в порядке возрастания. Для отображения возьмем такое $0 < \delta < (\varphi_1^1 - \varphi_1^0)/4$, что при $\rho(x_1, x_2) < \delta$ будет $\rho(g(x_1), g(x_2)) < \varepsilon/4, x_1, x_2 \in S^1$.

2) Построим теперь такой гомеоморфизм h окружности S^1 в пространство E^{1+1} , что $d(h, f) < \varepsilon$. Вначале построим некоторый вспомогательный

гомеоморфизм $\hat{h}$ окружности S^1 в пространство E^{1+1} . Пусть

$$\hat{h}(1, \varphi_1, 0) = \begin{cases} \left(1 + \frac{\varphi_1}{4\pi}, g(\varphi_1), 0\right) & \text{при } 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_1^0 + \frac{\delta}{8} = \bar{\varphi}_1^0, \\ \left(1 + \frac{\bar{\varphi}_1^0}{4\pi} + (\varphi_1 - \bar{\varphi}_1^0), g(\bar{\varphi}_1^0), 0\right) & \text{при } \bar{\varphi}_1^0 \leq \varphi_1 \leq \bar{\varphi}_1^0 + \frac{\delta}{8} = \bar{\bar{\varphi}}_1^0, \\ \left(1 + \frac{\bar{\varphi}_1^0}{4\pi} + \frac{\delta}{8} + (\varphi_1 - \bar{\bar{\varphi}}_1^0), g(\bar{\varphi}_1^0 - (\varphi_1 - \bar{\bar{\varphi}}_1^0)), 0\right) & \text{при } \bar{\bar{\varphi}}_1^0 \leq \varphi_1 \leq \bar{\bar{\varphi}}_1^0 + \frac{\delta}{8} = \bar{\bar{\bar{\varphi}}}_1^0, \\ \left(1 + \frac{\bar{\varphi}_1^0}{4\pi} + \frac{2\delta}{8} - t_0(\varphi_1 - \bar{\bar{\bar{\varphi}}}_1^0), g(\varphi_1^0), \frac{\delta^2}{16^2} - \left(\varphi_1 - \bar{\bar{\bar{\varphi}}}_1^0 - \frac{\delta}{16}\right)^2\right) & \text{при } \bar{\bar{\bar{\varphi}}}_1^0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_1^0 + \frac{\delta}{8} = \check{\varphi}_1^0, \quad -1 < \frac{\bar{\varphi}_1^0}{4\pi} + \frac{2\delta}{8} - t_0 \frac{\delta}{8} = \\ = -t_1 < 0, \\ \left(-1 - t_1 + t_1 \frac{\varphi_1 - \check{\varphi}_1^0}{2\pi - \check{\varphi}_1^0}, g\left(\varphi_1^0 + (2\pi - \varphi_1^0) \frac{\varphi_1 - \check{\varphi}_1^0}{2\pi - \check{\varphi}_1^0}\right), 0\right), & \text{при } \check{\varphi}_1^0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $\hat{h}$ является гомеоморфизмом окружности S^1 в пространство E^{1+1} . Запишем отображение $\hat{h}$ так: $\hat{h}(1, \varphi_1, 0) = (1 + \alpha(\varphi_1), \beta(\varphi_1), \gamma(\varphi_1))$, где $|\alpha(\varphi_1)| < 1$, $0 \leq \gamma(\varphi_1) < \pi/2$. А теперь рассмотрим деформацию этого отображения $\hat{h}_p(1, \varphi_1, 0) = (1 + p\alpha(\varphi_1); \beta(\varphi_1), p\gamma(\varphi_1))$, p изменяется от 1 до 0. При каждом $p \neq 0$ это гомеоморфизм окружности S^1 в пространство E^{1+1} и $\hat{h}_1 = \hat{h}$, а $\hat{h}_0(1, \varphi_1, 0) = (1, \beta(\varphi_1), 0)$. Поэтому найдется такое число p_0 , что

$$d(\hat{h}_{p_0}, \hat{h}_0) < \varepsilon/4. \quad (2)$$

Положим $\hat{h}_{p_0} = h$ и покажем, что h — требуемый гомеоморфизм и

$$d(h_0, g) < \varepsilon/4. \quad (3)$$

Итак, условие 1 определения 2 выполнено.

Вершины триангуляции, для которой бралось отображение g окружности S^1 , обозначим $a_1, a_2, \dots, a_n$ и к этим вершинам добавим точки $b_1 = \bar{\varphi}_1^0, b_2 = \bar{\varphi}_1^0, b_3 = \bar{\varphi}_1^0, b_4 = \check{\varphi}_1^0$. Во вновь полученной триангуляции гомеоморфизм h будет кусочно-линейным. Возьмем подпространства $E_1 = \{(r, \varphi_1, 0)\}$ и $E_2 = \{(r, 0, \varphi_2)\}$ пространства E^{1+1} . Возьмем в E_1 окрестность U_1 окружности S^1 , являющуюся ε_1 -окрестностью для S^1 . Так как $h(S^1) \cap \cap E^1$ — просто ломаная, являющаяся гомеоморфным образом отрезка $[\alpha, \beta]$, концы которой лежат на луче $\{(r, 0, 0)\}$, то гомеоморфизм $h|_{[\alpha, \beta]}$ можно расширить до гомеоморфизма ψ_1 множества $\bar{U}_1 = U_1 \cap \{(r, \varphi_1, 0)\}$ для $1/2 < r < 3/2$, $\varphi_1 \in [\alpha, \beta]$ в пространство E_1 так, чтобы образы лучей $U_1 \cap \{(r, \alpha, 0)\}$ и $U_1 \cap \{(r, \beta, 0)\}$ лежали на луче $\{(r, 0, 0)\}$. Так как $h(S^1) \cap E_2$ будет также ломаной, гомеоморфной отрезку $S^1 \setminus (\alpha, \beta)$, то гомеоморфизм $h|_{S^1 \setminus (\alpha, \beta)}$ можно расширить до гомеоморфизма ψ_2 множества $\bar{U}_1 = U_1 \cap \{(r, \varphi_1, 0)\}$, где $1/2 < r < 3/2$, $\varphi_1 \in S^1 \setminus (\alpha, \beta)$, в пространство E_2 так, чтобы гомеоморфизмы ψ_1 и ψ_2 совпадали на лучах $\{(r, \alpha, 0)\}$ и $\{(r, \beta, 0)\}$. Таким образом, гомеоморфизм ψ_3 , составленный из гомеоморфизмов ψ_1 и ψ_2 , будет гомеоморфизмом окрестности U_1 окружности $S^1 \subset E_1$ в пространство E^{1+1} . Возьмем теперь такие окрестности U_2 и $\bar{U}_2$ точек $(1, 0, 0)$ и $h(1, \varphi_1^0, 0)$ в подпространстве E_2 , чтобы они были гомеоморфными и $U_2 \cap E_1 = U_1 \cap E_2$, $\bar{U}_2 \cap E_1 = \psi_3(\{(r, \varphi_1^0, 0)\} \cap U_1) \cap E_2$. Тогда множество $U = U_1 \cup U_2$ будет окрестностью S^1 в пространстве E^{1+1} . За отображение g окрестности U в E^{1+1} возьмем любой такой гомео-

морфизм этой окрестности на множество $\psi_3(U_1) \cup \bar{U}_2$, что $g(S^1) = h(S^1)$. Этим доказательство леммы 1 заканчивается. Из теоремы 1 и леммы 1 следует

Теорема 2. *Любой окружностно подобный континуум вкладывается в пространство E^{1+1} .*

3. В этом пункте докажем результат, указанный во введении. Пусть $T^n = S^1_1 \times S^1_2 \times \dots \times S^1_n$. Вложим континуум T^n в пространство E^{n+1} следующим образом: $T^n = \{(1, \varphi_1, \dots, \varphi_n, 0)\}$ где $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, n$. Назовем такое вложение континуума T^n в пространство E^{n+1} правильным. Назовем отображение f^i континуума T^n на себя i -координатным, если оно имеет вид $f^i = \eta_1 \times \dots \times \eta_{i-1} \times f_i \times \eta_{i+1} \times \dots \times \eta_n$, где η_j , $j \neq i$, $j = 1, 2, \dots, n$, является гомеоморфизмом окружности S^1_j , а f_i — произвольное отображение окружности S^1_i на себя, $i = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 2. *Пусть континуум T^n правильно вложен в E^{n+1} .*

Тогда любое i -координатное отображение его на себя аппроксимируется гомеоморфизмами со скольжением.

Доказательство. Лемму 2 достаточно доказать для $i = 1$.

1) Рассмотрим в пространстве E^{n+1} подпространства

$$\begin{aligned} E^1 &= \{(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, 0)\} \cup \{(r, 0, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1})\}, \\ \hat{E}^1 &= \{(r, \varphi_1, 0, \dots, 0)\} \cup \{(r, 0, \dots, 0, \varphi_{n+1})\}, \quad \hat{E}^1 \subset E^1. \end{aligned}$$

По лемме 1 в подпространстве $\hat{E}^1$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такой гомеоморфизм h_1 окружности $1 \times S^1_1 \times 0 \times \dots \times 0 = S^1$ в подпространство $\hat{E}^1$, что $d(f_1, h_1) < \varepsilon$. Запишем $h_1(1, \varphi_1, 0, \dots, 0) = (h_{\tau^1}, h_{\varphi_1^1}, 0, \dots, 0, h_{\varphi_{n+1}^1})$. Тогда для гомеоморфизма h континуума T^n в подпространство E^1 , определенного следующим образом: $h(1, \varphi_1, \dots, \varphi_n, 0) = (h_{\tau^1}, h_{\varphi_1^1}, \eta_2, \dots, \eta_n, h_{0n+1^1})$, получим $d(h, f^1) < \varepsilon$, так как $f^1(1, \varphi_1, \dots, \varphi_n, 0) = (1, f_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0)$. Так как $E^1 \subset E^{n+1}$, то гомеоморфизм h континуума T^n является гомеоморфизмом в пространство E^{n+1} .

2) В пространстве $\hat{E}^1$ возьмем ε_1 окрестность $\bar{Q}_{\varepsilon_1^1}$, $\varepsilon_1 = 1/10$, окружности S^1 , тогда, по лемме 1, существует такой гомеоморфизм $\bar{g}$ этой окрестности в пространство $\hat{E}^1$, что $\bar{g}^1 h_3(S^1_1) = S^1_1$. Теперь в пространстве E^{n+1} возьмем подпространство $\bar{E} = \{(r, \varphi_1, 0, \dots, 0, \varphi_{n+1})\}$, $\hat{E}^1 \subset \bar{E}$. В подпространстве $\bar{E}$ возьмем ε_1 окрестность $O_{\varepsilon_1^1}$, $\varepsilon_1 = 1/10$ и распространим гомеоморфизм $\bar{g}$ до гомеоморфизма $\bar{g}$ окрестности $O_{\varepsilon_1^1}$ в подпространство $\bar{E}$, т. е. $\bar{g}/\bar{O}_{\varepsilon_1^1} = \bar{g}$. В пространстве $\bar{E}^{n+2}$ возьмем окрестность $O_{\varepsilon_1^1} \times S^1_2 \times \dots \times S^1_n$ континуума T^n и ее гомеоморфизм g , определенный формулой $g/O_{\varepsilon_1^1} = \bar{g}$ и $g/S^1_i = l_i$ — тождественное отображение, $i = 2, \dots, n$. Для гомеоморфизма $\bar{g}$ выполняется равенство $\bar{g}^{-1}h(T^n) = T^n$. В пространстве E^{n+1} возьмем открытое множество $U = E^{n+1} \cap \cap (O_{\varepsilon_1^1} \times S^1_2 \times \dots \times S^1_n)$ и ограничение g гомеоморфизма $\bar{g}$ на этом множестве. Множество U является окрестностью континуума T^n в пространстве E^{n+1} , а гомеоморфизм g множества U в пространство E^{n+1} является таким, что $g^{-1}h(T^n) = T^n$.

Замечание 1. Отображение f континуума T^n вида $f = f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n$ представляется как суперпозиция i -координатных отображений.

Из теоремы 1, леммы 2 и замечания 1 вытекает теорема, указанная во введении.

Поступило
24 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ R. H. Bing, Canad. J. Math., 14, № 1, 113 (1962). ² M. C. McCord, Canad. J. Math., 19, № 2, 321 (1967). ³ J. R. Isbell, Ann. Math., 70, 73 (1959).