Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 517

МАТЕМАТИКА

П. П. МОСОЛОВ, В. П. МЯСНИКОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА КОРНА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 IV 1971)

Пусть $u(x)$ — векторное поле, определенное в области ω, $\omega\subset R^n$. Введем функциональные пространства $\mathbf{L}_p$, $\mathbf{W}_p^1$, $\mathbf{H}_p^1$, нормы в которых определены следующим образом:

$$\|u\|_{\mathbf{W}_p^1}=|u|_{\mathbf{W}_p^1}+\|u\|_{\mathbf{L}_p},\quad \|u\|_{\mathbf{H}_p^1}=|u|_{\mathbf{H}_p^1}+\|u\|_{\mathbf{L}_p},$$

где

$$\|u\|_{\mathbf{L}_p}=\Big\{\int\limits_\omega |u|^p\,d\omega\Big\}^{1/p},\quad |u|=\Big(\sum_i u_i^2\Big)^{1/2},$$

$$\|u\|_{\mathbf{W}_p^1}=\Big\{\int\limits_\omega\Big(\sum_{ij}e_{ij}^2\Big)^{p/2}d\omega\Big\}^{1/p},\quad e_{ij}={}^1/_2\,(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i),$$

$$|u|_{\mathbf{H}_p^1}=\Big\{\int\limits_\omega\Big(\sum_i\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2\Big)^{p/2}d\omega\Big\}^{1/p}.$$

Пусть $f_1,\ldots,f_k$ — система функционалов в $\mathbf{H}_n^1$ таких, что $|f_i(u)|$ первой степени однородности и слабо полунепрерывны снизу в $\mathbf{H}_p^1$. Кроме того, относительно этих функционалов будет предполагаться, что если u принадлежит пространству $\mathbf{H}_p^1$, то из условий $|u|_{\mathbf{W}_p^1}=0$, $f_i(u)=0$, $i=1,\ldots,k$, следует, что $u=0$ как элемент пространства $\mathbf{H}_p^1$.

Неравенство Корна состоит в том, что для полей u из $\mathbf{H}_p^1$

$$\|u\|_{\mathbf{H}_p^1}\leqslant c\Big[|u|_{\mathbf{W}_p^1}+\sum_1^k|f_i(u)|\Big].\tag{1}$$

Для $1<p<\infty$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\|u\|_{\mathbf{H}_p^1}\leqslant c_1\|u\|_{\mathbf{W}_p^1},\tag{2}$$

которое обычно и называют неравенством Корна. Это неравенство играет важную роль при изучении корректных постановок краевых задач в нелинейной теории упругости, теории движения неньютоновских жидкостей и т. д.

Неравенство Корна в форме (2) в случае двух независимых переменных для $p=2$ было доказано Р. Курантом и Д. Гильбертом ([1]) в предположении, что поля обращаются в нуль на границе области ω. В случае n независимых переменных для $p=2$ это неравенство получено в работе ([2]) в предположении, что поля удовлетворяют ограничениям

$$\int\limits_\omega u\,d\omega=\int\limits_\omega \operatorname{rot} u\,d\omega=0.$$

В этой работе была использована возможность разложения произвольного поля в ортогональную сумму полей с векторным и скалярным потенциалами, а также дифференциальные свойства полей, являющихся решениями системы уравнений линейной теории упругости. Развивая схему Фридрихса ([2]), Д. М. Эйдус ([3]) доказал неравенство Корна в общем случае для $p = 2$. С. Г. Михлин ([4]), используя формулы Бетти (аналогичные формулам Грина в скалярном случае), свел неравенство Корна к теореме об ограниченности сингулярного оператора в L_p $(1 < p < \infty)$. Однако при таком подходе существенным ограничением является требование обращения в нуль полей на границе области ω. В работе ([5]) неравенство Корна для полей, обращающихся в нуль на границе области для любых p $(1 < p < \infty)$, было получено исходя из дифференциальных свойств решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона в нормах отрицательного порядка. С использованием техники сингулярных интегралов неравенство Корна в форме (2) было получено в работе ([6]) при $p = 2$. Исследование свойств полей, принадлежащих пространству $\mathbf{W}_p^1$, было проведено в работе С. Компонато ([7]), где было показано, что поля из $\mathbf{W}_p^1$ $(1 < < p < \infty)$ принадлежат пространству L_q для некоторых $q > p$.

В настоящей работе неравенство Корна при $1 < p < \infty$ доказывается для некоторого класса областей без каких-либо предположений о поведении полей на границе области. Показано, что в предельных случаях $p = 1$, $p = \infty$ постоянные c и c_1 не могут быть выбраны независимо от поля u, т. е. в этих случаях неравенство (1) несправедливо. Кроме того, в работе указаны некоторые возможные обобщения неравенства (1).

Доказательство (1) проводится в три этапа.

1°. В предположении, что $1 < p < \infty$ доказывается, что из неравенства (2) следует неравенство (1).

2°. Неравенство (2) доказывается для областей звездных относительно некоторой внутренней открытой подобласти.

3°. Неравенство (2) переносится на области общего вида.

Наметим план доказательства.

1°. Пусть выполнено неравенство (2). Тогда для доказательства (1) достаточно показать, что

$$\|u\|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_2 \Big[|u|_{\mathbf{W}_p^1} + \sum_1^k |f_i(u)| \Big]. \tag{3}$$

Предполагая неравенство неверным, находим, что существует последовательность полей u_n, для которых

$$\|u_n\|_{\mathbf{L}_p} = 1, \quad |u_n|_{\mathbf{W}_p^1} \to 0, \quad f_i(u_n) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Тогда, принимая во внимание (2), находим

$$\|u_n\|_{\mathbf{H}_p^1} \leqslant \text{const}.$$

Из равномерной выпуклости пространства $\mathbf{H}_p^1$ при $1 < p < \infty$ следует слабая компактность последовательности u_n, которая в силу скалярных теорем вложения С. Л. Соболева ([8]) сильно компактна в $\mathbf{L}_p$. Пусть u_0 — предельное поле для u_n. Тогда

$$\|u_0\|_{\mathbf{L}_p} = 1, \quad |u_0|_{\mathbf{W}_p^1} = 0, \quad f_i(u_0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Последние соотношения противоречивы, что и доказывает неравенство (3).

2°. Доказательство второго этапа следует схеме С. Л. Соболева ([8]) при доказательстве скалярных теорем вложения. Именно, будем исходить из некоторого интегрального представления для произвольного гладкого поля. Воспользуемся известными в механике сплошной среды формулами Чезаро ([9]), дающими выражение гладкого поля через симметричную часть его градиента:

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \sum_j \omega_{ij}(x^0)(x_j - x_j^0) -$$

$$- \sum_k \int_x^{x^0} [e_{ik}(\xi) + \sum_j (x_j - \xi_j)(\partial e_{ik}/\partial \xi_j - \partial e_{kj}/\partial \xi_i)]\, d\xi_k. \tag{4}$$

Здесь x — произвольная точка ω, x^0 — произвольная точка подобласти ω^0, относительно которой ω звездна, $\omega_{ij} = 1/2(\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)$. В силу звездности ω относительно ω^0 путь интегрирования может быть взят по отрезку, соединяющему x и x^0.

Пусть $p(x)$ — произвольная гладкая в ω функция, обращающаяся в нуль вне области ω^0 и $\int\limits_\omega p(x)\,d\omega \neq 0$. Умножим (4) на $p(x^0)$ и проинтегрируем по переменному x^0. Тогда

$$u_i(x) \int\limits_\omega p(x^0)\,d\omega^0 = \sum_j \int\limits_\omega K_{ij}(x, x^0)\,u_j(x^0)\,d\omega^0 - A, \tag{5}$$

где $K_{ij}(x, x^0)$ линейна по x и непрерывна по x^0. Эта функция легко определяется через $p(x^0)$,

$$A = \sum_k \int\limits_\omega p(x^0) \int\limits_0^R \left[e_{ik}(x + l\alpha) - \sum_j l\alpha_j \left(\frac{\partial e_{ik}(x + l\alpha)}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}(x + l\alpha)}{\partial x_i}\right)\right] \alpha_k\,dl\,d\omega^0,$$

$$R = |x - x^0|, \qquad \alpha = (x^0 - x)/R, \qquad 0 \leqslant l \leqslant R. \tag{6}$$

Переходя в (6) к сферическим координатам, находим

$$A = \sum_{k,j} \int\limits_\omega \frac{e_{kj}(y)}{R^{n-1}} B_{kji}(R, \alpha, x)\,d\omega_y, \quad R = |x - y|, \tag{7}$$

где $B_{kji}(R, \alpha, x)$ — непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. При получении формулы (7) было выполнено интегрирование по частям, которое законно, так как особенность в этих членах имеет порядок $1/R^{n-2}$. Кроме того, интегралы по поверхности исчезают, так как один из множителей под интегралом, связанный с функцией $p(x)$ и не связанный с e_{ij}, обращается в нуль на поверхности.

Далее, можно воспользоваться теоремой С. Г. Михлина ([10]) о дифференцировании интегралов со слабой особенностью. Используя эту теорему, находим

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\int\limits_\omega p(x)\,d\omega} \left\{ \sum_s \int\limits_\omega \frac{\partial K_{is}(x, y)}{\partial x_i} u_s(y)\,d\omega_y + \right.$$

$$\left. + \sum_{k,s} \left[\int\limits_\omega e_{ks}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{B_{ksi}(R, \alpha, x)}{R^{n-1}}\right] d\omega_y - e_{ks} \int\limits_{S_1} B_{ksi}(0, \alpha, x)\,\alpha_j\,dS \right] \right\},$$

где S_1 — поверхность единичного шара. В силу непрерывности сингулярного интеграла в L_p $(1 < p < \infty)$ ([11]) получаем

$$|u|_{H_p^1} \leqslant c_3 \left[\|u\|_{L_p} + \sum_{k,s} \|e_{ks}\|_{L_p}\right],$$

это эквивалентно (2).

3°. Пусть ω может быть представлена в виде объединения конечного или счетного числа попарно не пересекающихся областей ω_i; ω_i звездна относительно некоторой своей внутренней подобласти. Если все эти внутренние подобласти содержат шар фиксированного радиуса, то постоянные для ω_i в неравенствах (2) равномерно ограничены сверху. Суммируя неравенства (2) по областям ω_i, приходим к неравенству (2) в ω.

Замечание 1. Так как сингулярный интегральный оператор непрерывен в пространствах с данным показателем Липшица ([10]) и в некоторых пространствах Орлича ([12–14]), то неравенство Корна может быть доказано и в этих пространствах.

Замечание 2. Используя рассуждения третьего этапа доказательства неравенства Корна, легко получить соответствующее неравенство со степенным весом в областях, граница которых имеет «острия» степенного типа.

З а м е ч а н и е 3. При $p = 1$, $p = \infty$ неравенство Корна не имеет места. Для того чтобы показать это, достаточно рассмотреть случай двух независимых переменных и потенциальных полей. Как следует из работ ([15–17]), в пространствах L_1 и L_∞ комбинацию из вторых производных функции нельзя оценить через две другие линейные комбинации вторых производных линейно независимых с первой и саму функцию.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. К у р а н т, Д. Г и л ь б е р т, Методы математической физики, 2, 1945. [2] K. F r i d r i c h s, Ann. Math., 48, № 2 (1947). [3] Д. М. Э й д у с, ДАН, 76, № 2 (1951). [4] С. Г. М и х л и н, Проблема минимума функционала, 1952. [5] А. Л. К р ы л о в, ДАН 146, № 1 (1962). [6] J. G o b e r t, Bull. Soc. Roy. Sci. Liege, № 3—4 (1962). [7] S. C o m p o n a t o, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, ser. 3, 16, № 2 (1962). [8] С. Л. С о б о л е в, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М., 1950. [9] Л. И. С е д о в, Механика сплошных сред, 1, «Наука», 1969. [10] С. Г. М и х л и н, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962. [11] A. P. C a l d e r o n, A. Z y g m u n d, Am. J. Math., 78, № 2 (1956). [12] И. Б. С и м о н е н к о, ДАН, 130, № 5 (1960). [13] S. K o i z u m i, Proc. Japan Acad., 34, № 4 (1958). [14] S. K o i z u m i, Proc. Japan Acad., 34, № 5 (1958). [15] Б. С. М и т я г и н, ДАН, 123, № 4 (1958). [16] K. L e e u w, H. M i r k i l, Illinois J. Math., 8, № 1 (1964). [17] D. O r n s t e i n, Arch. Rat. Mech. Anal., 11, № 1 (1962).