Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 519.54+513.83

МАТЕМАТИКА

И. И. ПАРОВИЧЕНКО

О ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОПЕРАЦИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 IV 1971)

1. Настоящая работа относится к абстрактной теории операций над множествами, основы которой были заложены А. Колмогоровым ([1]), исторические подробности см. в ([2])). А именно, в работе будет дано аксиоматическое определение теоретико-множественных операций (теорема 1), указана их связь с булевыми гомоморфизмами полей множеств (теорема 2), дан критерий сравнительной мощности двух теоретико-множественных операций (теорема 3; следствием явится соответствующий критерий Канторовича — Ливенсона для двух δs-операций) и, наконец, рассмотрены некоторые классы операций, аналогичные классу δs-операций (теорема 4).

2. В основном используя терминологию из ([3]), дополнительно введем следующее. Под бинарным отношением между X и Y здесь понимаем тройку $M = \langle X, \Gamma_M, Y\rangle$, где Γ_M — график M, лежащий в $X \times Y$. Впрочем, если X и Y фиксированы, то в обозначениях не отличаем отношения от его графика. В частности, $\in_X$ — отношение принадлежности между X и $\mathfrak{P}(X)$ с графиком $\{\langle x, A\rangle | x \in A \subseteq X\}$; для него $\in_X(x)$ есть фиксированный ультрафильтр на X, соответствующий точке x, а $\in_X^{-1}(A) = \{x | x \in A\} = A$. Каждому отношению M отнесем θ_M: $y \mapsto M^{-1}(y)$ — отображение Y в $\mathfrak{P}(X)$. Абстрактной операцией Ψ с индексным множеством X над допустимым классом множеств Σ называем любое соответствие, которое каждому бинарному отношению M между X и Y при $Y \in \Sigma$ относит некоторое подмножество в Y; значение Ψ в M записываем в виде $\Psi(X; M, Y)$. Слова «допустимый класс» мы вводим для замены «класса всех множеств» во избежание логических трудностей. Соответственно значением теоретико-множественной операции $\Phi(X, \mathfrak{B})$ с базой $\mathfrak{B}$ в M будет $\Phi(X, \mathfrak{B}; M, Y) = \{y \in Y | M^{-1}(y) \in \mathfrak{B}\} = \theta_M^{-1}(\mathfrak{B})$; более кратко $\Phi(\mathfrak{B}; M) = \Phi(M) = \Phi(X, \mathfrak{B}; M)$. Также вместо $\Psi(X; M, Y)$ пишем $\Psi(X; M)$, что законно, так как M определяет Y. $\Gamma_{M_1} = \Gamma_{M_2} \Rightarrow \Phi(X, \mathfrak{B}; M_1) = \Phi(X, \mathfrak{B}; M_2)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda \overline{\in} \mathfrak{B}$.

Лемма 1. *Для бинарного отношения M между X и Y имеет место формула $M = \theta_M^{-1} \circ \in_X$.*

Доказательство. Имеем $\forall y \quad M^{-1}(y) = \in_X^{-1}(\theta_M(y))$, откуда $M^{-1} = \in_X^{-1} \circ \theta_M$ и $M = \theta_M^{-1} \circ \in_X$.

Лемма 2. *Для любого $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ имеет место $\mathfrak{B} = \Phi(X, \mathfrak{B}; \in_X, \mathfrak{P}(X))$.*

Доказательство. Так как $\in_X^{-1}(A) = A$, то $\theta_{\in_X} = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}(X)}$ и $\Phi(X, \mathfrak{B}; \in_X) = \theta_{\in_X}^{-1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$.

Лемма 3. *Если f — однозначное отображение Y в Z, то имеет место равенство $\Phi(X, \mathfrak{B}; f^{-1} \circ M, Y) = f^{-1}\Phi(X, \mathfrak{B}; M, Z)$.*

Доказательство. Результат операции представим в виде

$$\Phi(X, \mathfrak{B}; M) = \bigcup_{U \in \mathfrak{B}} \Big(\bigcap_{x \in U} M(x) \cap \bigcap_{x \in CU} CM(x) \Big)$$

(ср. ([4]), § 19), и требуемое следует из того, что f^{-1} сохраняет объединения, пересечения и дополнения.

* $\mathrm{id}_S = \{\langle x, x\rangle | x \in S\}$.

Теорема 1. *Абстрактная операция $\Psi(X, M)$ над допустимым классом Σ, содержащим $\mathfrak{P}(X)$, совпадает с некоторой теоретико-множественной тогда и только тогда, когда для любых $Y, Z \in \Sigma$, любого однозначного отображения f: $Y \to Z$ и любого бинарного отношения M между X и Y имеет место равенство $\Psi(X; f^{-1} \circ M) = f^{-1}\Psi(X; M)$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 3. Пусть условие выполнено для Ψ; тогда, применяя последовательно леммы 1, 2 и 3, получаем

$$\Psi(X; M, Y) = \Psi(X; \theta_M^{-1} \circ \in_X, Y) = \theta_M^{-1}(\Psi(X; \in_X, \mathfrak{P}(X))) = \theta_M^{-1}(\mathfrak{B}) =$$
$$= \theta_M^{-1}(\Phi(X, \mathfrak{B}; \in_X, \mathfrak{P}(X))) = \Phi(X, \mathfrak{B}; \theta_M^{-1} \circ \in_X, Y) = \Phi(X, \mathfrak{B}; M, Y).$$

Примечание 1. В теореме 1 за f нельзя принять взаимно однозначное отображение, даже если допустимый класс считать состоящим из равномощных множеств, о чем свидетельствует следующий пример, принадлежащий Очану ([5], стр. 74). Пусть $\Psi(M)$ пусто, если $\forall x\ M(x)$ конечно и $\Psi(M) = Y$, если это не так; тогда Ψ инвариантно относительно взаимно однозначных отображений, и тем не менее не существует теоретико-множественной операции, совпадающей с Ψ.

Теорема 2. *При фиксированных X и Y формула*

$$h = h_M(\mathfrak{B}) = \Phi(X, \mathfrak{B}; M, Y)$$

осуществляет взаимно однозначное соответствие между всеми полными булевыми гомоморфизмами h поля $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ в поле $\mathfrak{P}(Y)$ и всеми бинарными отношениями M между X и Y.

Доказательство. Имеем $\Phi(X, \mathfrak{B}; M, Y) = \theta_M^{-1}(\mathfrak{B})$, т. е. при фиксированном M значение операции в $\mathfrak{B}$ есть значение в $\mathfrak{B}$ полного булева гомоморфизма, индуцируемого в смысле Сикорского ([6], гл. 1, § 5, пример А) точечным отображением θ_M: $Y \to \mathfrak{P}(X)$. Остальное следует из нижеприведенной леммы, если положить $Z = \mathfrak{P}(X)$.

Лемма 4. *Любой полный булев гомоморфизм h: $\mathfrak{P}(Z) \to \mathfrak{P}(Y)$ представим в виде $h = f^{-1}$, где f: $Y \to Z$.*

Действительно, $Y = h(Z) = h(\bigcup\{\{z\} \mid z \in Z\}) = \bigcup\{h(\{z\}) \mid z \in Z\}$, где $h(\{z\})$ дизъюнктны, так как одноточечные множества $\{z\}$ дизъюнктны. Тогда отображение f, определенное по правилу $f(y) = z$ при $y \in h(\{z\})$, требуемое, так как

$$h(A) = \bigcup\{h(\{z\}) \mid z \in A,\ h(\{z\}) \neq \Lambda\} = \bigcup\{f^{-1}(z) \mid z \in A\} = f^{-1}(A).$$

3. Пусть $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$; тогда через $\tilde{\Phi}(X, \mathfrak{B}; \mathfrak{R}, Y)$ обозначим семейство множеств $\{\Phi(X, \mathfrak{B}; M, Y) \mid \forall x \in X, M(x) \in \mathfrak{R}\}$. Назовем операцию $\Phi(X_2, \mathfrak{B}_2)$ мощнее $\Phi(X_1, \mathfrak{B}_1)$, соответственно $\Phi(X_1, \mathfrak{B}_1)$ слабее $\Phi(X_2, \mathfrak{B}_2)$, если для всех Y и для всех $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ имеет место $\tilde{\Phi}(X_1, \mathfrak{B}_1; \mathfrak{R}, Y) \subseteq \Phi(X_2, \mathfrak{B}_2; \mathfrak{R}, Y)$. Через $\mathfrak{E}_X$ обозначим семейство всех фиксированных ультрафильтров на X. Система $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ называется экстенсивной, если $A \in \mathfrak{B}$, $A \subseteq A' \subseteq X \Rightarrow A' \in \mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}$ называется аддитивной (мультипликативной), если $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{B}$ ($A \cap B \in \mathfrak{B}$). Несобственным идеалом (фильтром) в X называем любую из систем: Λ, либо $\mathfrak{P}(X)$. Как было доказано Канторовичем и Ливенсоном (см. [7] или [5]), $\Phi(X, \mathfrak{B})$ — монотонная (или δs-) операция тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ экстенсивна. Отклоняясь от используемой в литературе неточной терминологии, систему множеств $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{P}(X)$ такую, что наименьшая экстенсивная система, содержащая $\mathfrak{B}_0$, есть $\mathfrak{B}$, будем называть подбазой монотонной операции $\Phi(X, \mathfrak{B})$.

Теорема 3. *Следующие условия для двух теоретико-множественных операций эквивалентны:*

(i) $\Phi(X_2, \mathfrak{B}_2)$ *мощнее* $\Phi(X_1, \mathfrak{B}_1)$;

(ii) $\tilde{\Phi}(X_1, \mathfrak{B}_1; \mathfrak{E}_{X_1}, \mathfrak{P}(X_1)) \subseteq \tilde{\Phi}(X_2, \mathfrak{B}_2; \mathfrak{E}_{X_1}, \mathfrak{P}(X_1))$;

(iii) $\mathfrak{B}_1 \in \tilde{\Phi}(X_2, \mathfrak{B}_2; \mathfrak{E}_{X_1}, \mathfrak{P}(X_1))$;

(iv) *существует такое однозначное отображение* $f\colon X_2 \to X_1$, *для которого выполнено условие* $A \in \mathfrak{B}_1 \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}_2$;

(v) *существует такой полный булев гомоморфизм* $h\colon \mathfrak{P}(X_1) \to \mathfrak{P}(X_2)$, *что* $\mathfrak{B}_1 = h^{-1}(\mathfrak{B}_2)$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидно (ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из леммы 2. Пусть выполнено (iii); тогда существует бинарное отношение M между X_2 и $\mathfrak{P}(X_1)$, что для каждого $x \in X_2$ $M(x)$ есть фиксированный ультрафильтр на X_1, определяемый некоторой точкой x', $x' = f(x) \in X_1$ и $M(x) = \in_{X_1}(f(x))$. Докажем, что f — требуемое. Имеем $M = \in_{X_1} \circ f$, откуда $M^{-1} = f^{-1} \circ \in^{-1}_{X_1}$ и $\theta_M(A) = M^{-1}(A) = f^{-1}(\in^{-1}_{X_1}(A)) = f^{-1}(A)$ ввиду $\in_X^{-1}(A) = A$, так что $\theta_M = f^{-1}$, являясь отображением $\mathfrak{P}(X_1)$ в $\mathfrak{P}(X_2)$. Но $\mathfrak{B}_1 = \Phi(X_2, \mathfrak{B}_2; \mathfrak{S}_{X_1}, \mathfrak{P}(X_1)) = \theta_M^{-1}(\mathfrak{B}_2)$, откуда также $C\mathfrak{B}_1 = \theta_M^{-1}(C\mathfrak{B}_2)$. Следовательно, $\theta_M(\mathfrak{B}_1) = \theta_M(\theta_M^{-1}(\mathfrak{B}_2)) \subseteq \mathfrak{B}_2$ и $\theta_M(C\mathfrak{B}_1) = \theta_M(\theta_M^{-1}(C\mathfrak{B}_2)) \subseteq C\mathfrak{B}_2$. Так как $\theta_M = f^{-1}$, то (iv) следует. Пусть выполнено (iv) и $B \in \tilde{\Phi}(X_1, \mathfrak{B}_1; \mathfrak{R}, Y)$, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$; тогда $B = \Phi(X_1, \mathfrak{B}_1; M, Y)$, где $\forall x' \in X_1$, $M(x') \in \mathfrak{R}$. Беря f из условия (iv), имеем $B = \{y \in Y \mid M^{-1}(y) \in \mathfrak{B}_1\} = \{y \in Y \mid f^{-1}(M^{-1}(y)) \in \mathfrak{B}_2\} = \{y \in Y \mid (M \circ f)^{-1}(y) \in \mathfrak{B}_2\} = \Phi(X_2, \mathfrak{B}_2; M \circ f, Y)$, где $\forall x \in X_2$, $(M \circ f)(x) \in \mathfrak{R}$, т. е. $B \in \Phi(X_2, \mathfrak{B}_2; \mathfrak{R}, \tilde{Y})$, и (i) следует. Учитывая лемму 4, имеем (iv) $\Leftrightarrow$ (v).

Ввиду (iii) и (iv) получаем соответственно

Следствие 1. $\tilde{\Phi}(X_2, \mathfrak{B}_2; \mathfrak{E}_{X_1}, \mathfrak{P}(X_1))$ *состоит из баз тех и только тех теоретико-множественных операций с индексным множеством* X_1, *которые слабее* $\Phi(X_2, \mathfrak{B}_2)$.

Следствие 2 (Канторович — Ливенсон). *Для монотонных операций* $\Phi(X_1, \mathfrak{B}_1)$ *и* $\Phi(X_2, \mathfrak{B}_2)$ *вторая мощнее первой тогда и только тогда, когда существует однозначное отображение* $f\colon X_2 \to X_1$ *такое, что для него образ подбазы второй операции есть подбаза первой.*

Теорема 4. *Имеют место следующие эквивалентности, где в левой части операции берутся на бинарных отношениях между фиксированными* X *и* Y, $Y \neq \Lambda$, *а включения предполагаются выполненными тождественно по* M_1, M_2 *между* X *и* Y:

(a) $\Phi(\mathfrak{B}; M_1 \cap M_2) \subseteq \Phi(\mathfrak{B}; M_1) \cap \Phi(\mathfrak{B}; M_2) \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ *экстенсивно;*

($\tilde{\text{a}}$) $\Phi(\mathfrak{B}; M_1 \cap M_2) \supseteq \Phi(\mathfrak{B}; M_1) \cup \Phi(\mathfrak{B}; M_2) \Leftrightarrow C\mathfrak{B}$ *экстенсивно;*

(b) $\Phi(\mathfrak{B}; M_1 \cap M_2) \supseteq \Phi(\mathfrak{B}; M_1) \cap \Phi(\mathfrak{B}; M_2) \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ *мультипликативно;*

($\tilde{\text{b}}$) $\Phi(\mathfrak{B}; M_1 \cap M_2) \subseteq \Phi(\mathfrak{B}; M_1) \cup \Phi(\mathfrak{B}; M_2) \Leftrightarrow C\mathfrak{B}$ *мультипликативно;*

(c) $\Phi(\mathfrak{B}; M_1 \cup M_2) \supseteq \Phi(\mathfrak{B}; M_1) \cap \Phi(\mathfrak{B}; M_2) \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ *аддитивно;*

($\tilde{\text{c}}$) $\Phi(\mathfrak{B}; M_1 \cup M_2) \subseteq \Phi(\mathfrak{B}; M_1) \cup \Phi(\mathfrak{B}; M_2) \Leftrightarrow C\mathfrak{B}$ *аддитивно.*

Докажем, например (b). Пусть $\mathfrak{B}$ мультипликативно и $y \in \Phi(\mathfrak{B}; M_1) \cap \Phi(\mathfrak{B}; M_2)$; тогда $M_1^{-1}(y) \in \mathfrak{B}$, $M_2^{-1}(y) \in \mathfrak{B}$, откуда $(M_1 \cap M_2)^{-1}(y) = M_1^{-1}(y) \cap M_2^{-1}(y) \in \mathfrak{B}$, т. е. $y \in \Phi(\mathfrak{B}; M_1 \cap M_2)$. Пусть $\mathfrak{B}$ не мультипликативно и $A, B \in \mathfrak{B}$, $A \cap B \overline{\in} \mathfrak{B}$. Положим $M_1 = A \times Y$, $M_2 = B \times Y$; тогда $M_1 \cap M_2 = (A \cap B) \times Y$, и имеем $\Phi(\mathfrak{B}; M_1) = \Phi(\mathfrak{B}; M_2) = Y$, $\Phi(\mathfrak{B}; M_1 \cap M_2) = \Lambda \neq Y$. Включение не выполнено.

Следствие 3. *Если теоретико-множественная операция слабее операции, удовлетворяющей некоторому тождественному включению теоремы 4, то она тождественно удовлетворяет этому же включению. В частности, если операция слабее* δs*-операции, то она является* δs*-операцией.*

Следствие 4. *Для того чтобы отображение* $\Phi(X, \mathfrak{B}; M, Y)$: $\mathfrak{P}(X \times Y) \to \mathfrak{P}(Y)$ *было аддитивным* (*мультипликативным*) *по аргументу* M, *необходимо и достаточно, чтобы* $C\mathfrak{B}$ *были идеалом* ($\mathfrak{B}$ *было фильтром*), *быть может, несобственным. Для того чтобы это отображение было булевым гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{B}$ *было ультрафильтром.*

Ограничимся замечанием, что при доказательстве последнего утверждения нужно воспользоваться формулой $C(M^{-1}(y)) = (CM)^{-1}(y)$, а если $\mathfrak{B}$ — ультрафильтр, то $-\mathfrak{B} = C\mathfrak{B}$ и тогда имеем $\Phi(X, \mathfrak{B};\ CM, Y) = \{y \in Y | (CM)^{-1}(y) \in \mathfrak{B}\} = \{y \in Y | C(M^{-1}(y)) \in \mathfrak{B}\} = \{y \in Y | M^{-1}(y) \in -\mathfrak{B}\} = \Phi(X, -\mathfrak{B};\ M, Y) = \Phi(X, C\mathfrak{B};\ M, Y) = C\Phi(X, \mathfrak{B};\ M, Y)$, последнее — ввиду теоремы 2, так что Φ — булев гомоморфизм по M.

4. Предложение, аналогичное лемме 2, принадлежит Канторовичу и Ливенсону (ср. ([7]) или ([5])); как мы заметили, им же принадлежит утверждение (а) теоремы 4, если учесть, что тождественное включение слева в (а) эквивалентно монотонности Φ по M. Кроме того, уже отмечалось в литературе (([8]), гл. 4, § 1), что если $C\mathfrak{B}$ — идеал, то Φ аддитивно по M, что содержится в следствии 4. Последнее утверждение следствия 4 не представится удивительным, если вспомнить теорему о двузначном гомоморфизме булевых алгебр (([6]), гл. 1, § 6) и, по существу, совпадает с этой теоремой, если за Y взять одноточечное множество $\{y_0\}$, а $\mathfrak{P}(X \times \{y_0\})$ заменить на произвольное лежащее там поле и учесть теорему Стоуна о представлении булевых алгебр полями. Но в этом свете теорему 4 можно считать некоторым расщеплением теоремы о двузначном гомоморфизме на более элементарные предложения. Операция Φ сохраняет по аргументу M дополнения тогда и только тогда, когда совпадает со своей дополнительной операцией: $\Phi = \Phi^C$ ([3]). Операция $\Phi(X, \mathfrak{B})$ есть δs-операция, совпадающая со своей дополнительной, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ есть максимальная система относительно свойства «2-центрированности»: $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow A \cap B \neq \Lambda$ (ср. ([4], [9])). Для этого достаточно, чтобы $\mathfrak{B}$ было ультрафильтром. Но это не необходимо, и вот пример такой эффективно указанной максимальной 2-центрированной системы $\mathfrak{B}$ на натуральном ряду: полагаем $\mathfrak{B} = \{A | A \supseteq \{1, 2\}$, либо $A \supseteq \{1, 3\}$, либо $A \supseteq \{2, 3\}\}$; $\mathfrak{B}$ максимально, так как если B пересекает каждое из множеств $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, то B содержит одно из них. Наконец, отметим, что в ([10]) была предпринята ошибочная попытка доказать теорему, аналогичную нашей теореме 3. Если за X принять натуральный ряд и положить $\mathfrak{B}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \ldots\}$, то по теореме 3 $\Phi(X, \mathfrak{B}_2)$ мощнее $\Phi(X, \mathfrak{B}_1)$; между тем, всякое однозначное отображение $f\colon X \to X$ с условием $f(\mathfrak{B}_2) \subseteq \mathfrak{B}_1$ есть константа, чего не могло бы быть по теореме 14 из ([10]).

Примечание 2. Нашу теорему 2 из ([3]) можно улучшить, отбросив требование регулярности для $\aleph_\alpha$, если за J_α принять пространство всех последовательностей $\{x_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$ из нулей и единиц с открытым базисом, состоящим из множеств последовательностей вида: $\{\{x_\xi\} | x_\xi = \mathrm{const}$ при $\xi \leqslant \eta < \omega_\alpha\}$. Наше доказательство останется в силе.

Кишиневский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
9 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Матем. сборн., 35 (1928). [2] А. Н. Колмогоров, УМН, 21, в. 4 (1966). [3] И. И. Паровиченко, ДАН, 196, № 5 (1971). [4] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.— Л., 1937. [5] Ю. С. Очан, УМН, 10, в. 3 (1955). [6] Р. Сикорский, Булевы алгебры, М., 1969. [7] L. Kantorovitch, B. Livenson, Fund. Math., 18 (1932). [8] К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств, М., 1970. [9] И. И. Паровиченко, ДАН, 115, № 5 (1957). [10] А. А. Ляпунов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 40 (1953).