Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 519.4:517:513.88

*МАТЕМАТИКА*

В. С. ШУЛЬМАН

# ОБ АЛГЕБРАХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ ТИПА $\Pi_1$

*(Представлено академиком И. Н. Векуа 16 IV 1971)*

Симметричная алгебра операторов в пространстве $\mathfrak{L}$ типа $\Pi_1$ называется невырожденной, если $\mathfrak{L}$ не содержит вырожденных подпространств, инвариантных относительно всех операторов алгебры. Симметричные алгебры операторов в $\mathfrak{L}$, не являющиеся невырожденными, мы будем называть общими. Структура невырожденных алгебр (без дополнительных топологических условий) изучалась в ([1]). М. А. Наймарком ([3]) был получен ряд результатов, относящихся к общим алгебрам операторов. В ([4]) А. И. Логинов, используя результаты ([2]), дал описание всех, с точностью до унитарной эквивалентности, полных по норме коммутативных симметричных алгебр операторов в $\Pi_1$ в терминах особым образом реализованных коммутативных симметричных алгебр операторов в гильбертовом пространстве.

Предмет нашего рассмотрения составляют полные по норме общие алгебры операторов. Основной результат (предложение 6) в известной степени близок результатам ([4]), хотя, как и следовало ожидать, отказ от требования коммутативности привел к усложнению конструкции.

1. Пусть $\mathfrak{L}$ — пространство типа $\Pi_1$, $S$ — полная общая алгебра операторов в $\mathfrak{L}$, $\mathscr{L}$ — одно из нейтральных подпространств пространства $\mathfrak{L}$, инвариантных относительно $S$ (существование таких подпространств следует из того, что $S$ — общая алгебра). Подпространство $\mathscr{L}$ одномерно и, следовательно, $\mathscr{L}$ есть собственное подпространство для каждого оператора из $S$. Пусть $A \to \lambda(A)$ — соответствующий собственный функционал алгебры $S$ и $S_0$ — его ядро. Пусть, далее, $\mathscr{L}^\perp$ — ортогональное дополнение к $\mathscr{L}$ в $\mathfrak{L}$ и $H = \mathscr{L}^\perp / \mathscr{L}$. Каноническая проекция $\pi$: $\mathscr{L}^\perp \to H$ позволяет ввести в $H$ (дефинитное) скалярное произведение

$$[\pi(x), \pi(y)] = (x, y), \quad x \in \mathscr{L}^\perp, \quad y \in \mathscr{L}^\perp,$$

и для любого $A \in S$ определить ограниченный оператор $\tilde{A}$ в $H$:

$$\tilde{A}(\pi(x)) = \pi \cdot (Ax),$$

называется основной частью оператора $A$. Отображение $A \to \tilde{A}$ — симметричный гомоморфизм алгебры $S$ в алгебру ограниченных операторов в $H$, ядро которого мы обозначим $\operatorname{ch} S$, а образ — $\tilde{S}$. Следуя ([2]), будем называть алгебру $\tilde{S}$ основной частью алгебры $S$.

Определение. Алгебра $S$ называется алгеброй класса 0, если $\operatorname{ch} S = (0)$; алгеброй класса 1, если $(0) \neq \operatorname{ch} S \subset S_0$; алгеброй класса 2а), если $\operatorname{ch} S \neq (0) = S_0 \cap \operatorname{ch} S = S_0^* \cap \operatorname{ch} S$; алгеброй класса 2б), если $0 \neq S_0 \cap \operatorname{ch} S = S_0^* \cap \operatorname{ch} S \neq \operatorname{ch} S$; алгеброй класса 3а), если $S_0 \cap \operatorname{ch} S \neq S_0^* \cap \operatorname{ch} S$, $\operatorname{ch} S \cap S_0 \cap S_0^* = (0)$; алгеброй класса 3б), если $S_0 \cap \operatorname{ch} S \neq S_0^* \cap \operatorname{ch} S$, $\operatorname{ch} S \cap S_0 \cap S_0^* \neq (0)$.

Можно показать, что две унитарно эквивалентные алгебры принадлежат одному и тому же классу. В частности, определение класса алгебры не зависит от выбора подпространства $\mathscr{L}$.

Предложение 1. *Если алгебра $S$ не принадлежит классу 1, то ее основная часть $\mathring{S}$ является $C^*$-алгеброй операторов в $H$.*

Основная часть алгебры класса 1 не обязательно должна быть полной; она, вообще говоря, принадлежит более широкому классу «квазиполных» алгебр. Мы приводим ниже определение квазиполноты и формулируем несколько предложений о квазиполных алгебрах, использованных при доказательстве основного результата.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ — симметричная алгебра операторов в гильбертовом пространстве $H$ и $l$ — мультипликативный функционал. Квазивектором алгебры $\mathfrak{A}$, присоединенным к $l$ (или, короче, $l$-квазивектором) назовем линейное отображение $p$: $\mathfrak{A} \to H$, удовлетворяющее условию

$$p(AB) = Ap(B) + l(B)p(A)$$

для любых $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$. Всякий вектор $x \in H$ определяет «стандартный» квазивектор $p_{x,l}$:

$$p_{x,l}(A) = Ax - l(A)x.$$

Предложение 2. *Всякий квазивектор $C^*$-алгебры стандартен.*

*Всякий непрерывный квазивектор стандартен.*

Отображение $f$: $\mathfrak{A} \to H$ называется полузамкнутым, если алгебра $\mathfrak{A}$ полна относительно нормы $|A|_f = \|A\| + \|f(A)\| + \|f(A^*)\|$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется $l$-квазиполной, если существует хотя бы один полузамкнутый $l$-квазивектор этой алгебры. Объект $(\mathfrak{A}, l, p)$, состоящий из $*$-алгебры $\mathfrak{A}$ операторов в $H$, ее мультипликативного функционала $l$ и полузамкнутого $l$-квазивектора $p$ алгебры $\mathfrak{A}$, будем называть тройкой в $H$. Алгебры, квазиполные относительно нулевого функционала, назовем квазиполными.

Предложение 3. *Если алгебра $l$-квазиполна, то функционал $l$ — вещественный и его ядро — квазиполная алгебра.*

*Всякая квазиполная алгебра вполне симметрична.*

*Если равномерное замыкание квазиполной алгебры содержит единичный оператор, то эта алгебра полна.*

Предложение 4. *Всякий замкнутый квазивектор полузамкнут.*

*Всякий полузамкнутый квазивектор допускает замыкание.*

*Если алгебра коммутативна, то всякий ее полузамкнутый квазивектор замкнут.*

*Если алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна и собственное подпространство, соответствующее ее мультипликативному функционалу $l$, тривиально, то всякий $l$-квазивектор алгебры $\mathfrak{A}$ допускает замыкание.*

Последние два утверждения предложения 4 перестают быть справедливыми, если отбросить условие коммутативности.

Предложение 5. *Для того чтобы $*$-алгебра операторов в гильбертовом пространстве была унитарно эквивалентной основной части какой-либо полной общей алгебры операторов в $\Pi_1$, необходимо и достаточно, чтобы она была $l$-квазиполной для некоторого мультипликативного функционала $l$.*

Отметим, что в ([2]) был, по существу, найден общий вид квазивектора коммутативной $*$-алгебры операторов, в сепарабельном гильбертовом пространстве, а в ([4]) была построена универсальная модель коммутативной квазиполной $*$-алгебры.

3. Перейдем к формулировке основного результата. Оговорим заранее, что для каждой из построенных ниже «канонических» алгебр пространство $\mathfrak{L}$ реализуется в виде прямой ортогональной суммы

$$\mathfrak{L} = H \oplus (\mathfrak{L} \dotplus \mathscr{M}),$$

где $H$ — гильбертово пространство, $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ — одномерные пространства, в которых зафиксированы ненулевые вектора $\xi \in \mathscr{L}$ и $\eta \in \mathscr{M}$, причем скалярное произведение в $\mathscr{L} \dotplus \mathscr{M}$ задано равенствами:

$$(\xi, \xi) = (\eta, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) = 1.$$

Вещественное подпространство * $H_1$ пространства $H$ будем называть чисто вещественным, если $H_1 \cap (iH_1) = (0)$.

Как обычно, ортогональное дополнение произвольного подмножества $K$ пространства $H$ обозначается $K^{\perp}$.

Поле комплексных чисел обозначим $C$.

Предложение 6. *Всякая полная общая алгебра операторов в $\mathfrak{L}$ унитарно эквивалентна одной из следующих «канонических алгебр».*

0) *Задается парой $(\mathfrak{A}, l)$, состоящей из $C^*$-алгебры $\mathfrak{A}$ операторов в $H$ и ее мультипликативного функционала $l$. Произвольный оператор алгебры определяется выбором оператора $A \in \mathfrak{A}$ и действует на элементы пространства $\mathfrak{L}$ по формулам*

$$\xi \to l(A)\xi, \quad \eta \to l(A)\eta, \quad x \to Ax, \quad x \in H,$$

*(стрелка обозначает действие на элементы пространства $\mathfrak{L}$ оператора из $S$, соответствующего оператору $A \in \mathfrak{A}$. Аналогичных обозначений мы будем придерживаться и в дальнейшем).*

1) *Задается чисто вещественным подпространством $H_r \subset H$; тройкой $(\mathfrak{A}, l, p)$ в ортогональном дополнении к $H_r$; подпространством $H_F \subset H_r^{\perp}$, инвариантным относительно операторов из $\mathfrak{A}$. Оператор алгебры определяется выбором $A \in \mathfrak{A}$, $x_1 \in H_F$, $x_2 \in H_F$, $y_1 \in H_r$, $y_2 \in H_r$, $\gamma \in C$:*

$$\xi \to l(A)\xi, \quad \eta \to l(A)\eta + x_1 + y_1 + iy_2 + \gamma\xi;$$
$$x \to Ax + (x, x_2)\xi, \quad x \in H_r^{\perp};$$
$$y \to l(A)y + (y, y_1 - iy_2)\xi, \quad y \in (H_r^{\perp})^{\perp}.$$

2а) *Задается $C^*$-алгеброй $\mathfrak{A}$ операторов в $H$. Оператор алгебры определяется выбором $A \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in C$:*

$$\xi \to \lambda\xi, \quad \eta \to \lambda\eta, \quad x \to Ax, \quad x \in AH.$$

2б) *Задается $C^*$-алгеброй $\mathfrak{A}$ операторов в $H$ и подпространством $H_F \subset H$, инвариантным относительно $\mathfrak{A}$. Оператор алгебры определяется набором $A \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in C$, $x_1 \in H_F$, $x_2 \in H_F$, $\gamma \in C$:*

$$\xi \to \lambda\xi, \quad \eta \to \lambda\eta + x_1 + \gamma\xi,$$
$$x \to Ax + (x, x_2)\xi, \quad x \in H.$$

3а) *Задается $C^*$-алгеброй $\mathfrak{A}$ операторов в $H$. Оператор алгебры определяется выбором $\lambda \in C$, $\mu \in C$, $A \in \mathfrak{A}$:*

$$\xi \to \lambda\xi, \quad \eta \to \mu\eta, \quad x \to Ax, \quad x \in H.$$

3б) *Задается $C^*$-алгеброй $\mathfrak{A}$ операторов в $H$ и подпространством $H_F \subset H$, инвариантным относительно $\mathfrak{A}$. Оператор алгебры определяется выбором $A \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in C$, $\mu \in C$, $\gamma \in C$, $x_1 \in H_F$, $x_2 \in H_F$:*

$$\xi \to \lambda\xi, \quad \eta \to \mu\eta + x_1 + \gamma\xi.$$

Отметим следствие из предложения 6, касающееся известной задачи о том, при каких условиях банахова $*$-алгебра эквивалентна (т. е., гомеоморфна и $*$-изоморфна) некоторой алгебре операторов в $\Pi_1$.

Предложение 7. *Полупростая банахова $*$-алгебра эквивалентна некоторой общей алгебре операторов в $\Pi_1$ тогда и только тогда, когда она эквивалентна $C^*$-алгебре.*

---

* Т. е. замкнутый линеал вещественного банахова пространства.

Было бы интересно получить описание квазиполных алгебр через разложение их равномерных замыканий в прямой интеграл неприводимых (сходное с тем, что было дано А. И. Логиновым в коммутативном случае). В этом направлении пока получено

Предложение 8. *Всякая неприводимая квазиполная алгебра полна.*

Заметим, что существуют квазиполные алгебры, не являющиеся полными, слабое замыкание которых — фактор типа $I_\infty$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
11 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. С. Исмагилов, ДАН, 158, № 2, 268 (1964). [2] M. A. Naïmark, Rev. Roum. Math. pures et appl. (Bucarest), 9, 6 499 (1964). [3] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, 3, 689 (1965). [4] А. И. Логинов, ДАН, 179, № 6, 1276 (1968).