

Н. А. БОБЫЛЕВ, М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ
ОПЕРАТОРЫ С КОНТИНУУМАМИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 7 II 1972)

При исследовании нелинейных операторов A в банаховых пространствах наиболее привычны условия, при которых A имеет конечное число неподвижных точек. При малых возмущениях оператора A конечность числа неподвижных точек, как правило, сохраняется; эти неподвижные точки непрерывно зависят от параметра, хотя могут разветвляться и т. д.

Более сложен случай, когда у оператора A есть континуум F_0 неподвижных точек. Здесь при малых возмущениях $B(x, \varepsilon)$ оператора A континуум F_0 обычно вырождается в конечное или счетное число неподвижных точек $x_i(\varepsilon)$; при $\varepsilon \rightarrow 0$ эти неподвижные точки переходят в «порождающие» элементы $x_i^* = x_i(0) \in F_0$, которые в естественных случаях находятся без труда. Примерами могут служить многие задачи теории нелинейных колебаний (см., например, ^(1, 2)).

Специфичные проблемы возникают при изучении операторов с параметрами. Здесь при малых возмущениях операторов континуумы неподвижных точек не распадаются на отдельные точки, а лишь некоторым способом деформируются. Указанная ситуация возникает, например, при исследовании решений дифференциальных уравнений, инвариантных относительно некоторой непрерывной группы преобразований независимых переменных (например, при анализе периодических решений автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений). В то же время, насколько нам известно, с позиций общей теории операторов эта ситуация не изучалась.

1. Рассмотрим в некоторой области G банахова пространства E вполне непрерывный оператор $A(x, \lambda)$, $x \in G$, $\lambda \in R^n$, со значениями в E . Пусть у $A(x, \lambda)$ при $\lambda \neq 0$ нет неподвижных точек, а у $A(x, 0)$ неподвижные точки образуют n -мерный континуум F_0 .

Пусть $z \in F_0$ и $\Lambda_0(x)$ — определенный в некоторой окрестности точки z непрерывный оператор со значениями в R^n . Если пересечение множества нулей оператора $\Lambda_0(x)$ и континуума F_0 состоит из одной точки z , то z будет изолированной неподвижной точкой вполне непрерывного оператора $A[x, \Lambda_0(x)]$. Обозначим через $\text{ind}(z, \Lambda_0)$ топологический индекс ^(3, 4) этой неподвижной точки.

Обозначим через $B(x, \lambda, \varepsilon)$, $x \in G$, $\lambda \in R^n$, ε — скаляр, вполне непрерывный оператор со значениями в E такой, что при любом $\rho > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|\lambda\|, \|x\| \leq \rho} \|B(x, \lambda, \varepsilon)\| = 0. \quad (1)$$

Если найдется такой оператор $\Lambda_0(x)$, что $\text{ind}(z, \Lambda_0) \neq 0$, то, очевидно, при каждом достаточно малом ε оператор $A(x, \lambda) + B(x, \lambda, \varepsilon)$ при некотором $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ имеет в G по крайней мере одну неподвижную точку $x(\varepsilon)$, причем $\lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ и $\|x(\varepsilon) - z\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Уже в связи с этим простым (но важным!) утверждением возникает вопрос о том, как зависит $\text{ind}(z, \Lambda_0)$ от точки $z \in F_0$ и от оператора $\Lambda_0(x)$.

Всюду в дальнейшем мы ограничимся случаем, когда F_0 является гладким многообразием; через $\Pi(z)$ обозначим n -мерную плоскость в E , каса-

тельную к F_0 в точке $z \in F_0$. Определенное в окрестности $z \in F_0$ отображение $\Lambda_0(x)$ назовем трансверсальным континууму F_0 в точке z , если определена производная $\Lambda_0'(z)$ и если $\Lambda_0'(z)(x - z) \neq 0$ при $x \in \Pi(z)$ и $x \neq z$. Существование трансверсальных отображений очевидно.

Теорема 1. Пусть гладкий континуум F_0 связан.

Тогда число $|\text{ind}(z_0, \Lambda_0)|$ одинаково при всех $z \in F_0$ и при всех трансверсальных F_0 отображениях $\Lambda_0(x)$.

Общее значение $\text{ind}(F_0; A)$ чисел $|\text{ind}(z, \Lambda_0)|$ назовем индексом континуума F_0 неподвижных точек. Для вычисления $\text{ind}(F_0; A)$ можно применять обычные алгоритмы (см., например, ⁽³⁻⁵⁾) вычисления индексов изолированных неподвижных точек вполне непрерывных операторов.

2. Будем говорить, что подпространство $E_0 \subset E$ дефекта n трансверсально n -мерной плоскости Π , если пересечение $E_0 \cap \Pi$ состоит из одной точки. Пусть по каждому $z \in F_0$, трансверсальному $\Pi(z)$ подпространству E_0 и числу $\kappa > 0$ можно определить такое $\delta = \delta(z, E_0, \kappa) > 0$, что для любого удовлетворяющего (1) вполне непрерывного оператора $B(x, \lambda, \varepsilon)$ из неравенства $\|B(x, \lambda, \varepsilon)\| < \delta$ вытекает существование у оператора $A(x, \lambda) + B(x, \lambda, \varepsilon)$ при некотором $\lambda = \lambda(\varepsilon) \in (-\kappa, \kappa)$ по крайней мере одной такой неподвижной точки $x(\varepsilon)$, для которой $x(\varepsilon) - z \in E_0$ и $\|x(\varepsilon) - z\| < \kappa$. Тогда континуум F_0 неподвижных точек оператора $A(x, 0)$ назовем трансверсально устойчивым.

Обозначим через $F(\varepsilon)$ множество лежащих в G неподвижных точек оператора $A(x, \lambda) + B(x, \lambda, \varepsilon)$ при достаточно малых λ . Пусть на границе каждой достаточно малой окрестности любой точки $z \in F_0$ есть хотя бы одна точка множества $F(\varepsilon)$ для некоторого значения параметра ε . Тогда будем говорить, что множества $F(\varepsilon)$ образуют непрерывную ветвь неподвижных точек над F_0 .

Теорема 2. Пусть $\text{ind} \subset (F_0; A) \neq 0$.

Тогда континуум F_0 неподвижных точек оператора $A(x, 0)$ трансверсально устойчив, а множества $F(\varepsilon)$ образуют непрерывную ветвь над F_0 .

Анализ континуума F_0 упрощается, если оператор $A(x, 0)$ непрерывно дифференцируем и если отвечающее собственному значению 1 корневое подпространство каждого оператора $A_x'(z, 0)$, $z \in F_0$, совпадает с $\Pi(z)$; тогда $\text{ind}(F_0; A) = 1$. В этом случае утверждения теоремы 2 верны и без предположения о полной непрерывности операторов A и B : достаточна их гладкость.

3. Понятия и утверждения предыдущих пунктов без труда переносятся на случай, когда у уравнения $x = A(x, \lambda)$ в области G есть решения при различных λ . Допустим, что каждому x из множества F_0 решений отвечает единственное $\lambda = \varphi(x)$, при котором x является решением рассматриваемого уравнения. Если $\varphi(x) \equiv 0$, то мы приходим к рассмотренной выше ситуации.

Если F_0 — гладкое многообразие и оператор $\varphi(x)$ дифференцируем, то точка $z \in F_0$ заведомо будет изолированной неподвижной точкой оператора $A(x, \varphi_1(x) + \mu(x))$, где $\varphi_1(x)$ — дифференцируемое продолжение оператора $\varphi(x)$ на окрестность точки z , а $\mu(x)$ — такой дифференцируемый в точке z оператор со значениями в R^n , что подпространство нулей оператора $\mu'(z)$ трансверсально $\Pi(z)$.

4. Пусть E является прямой суммой подпространств E_0 и E_1 . Пусть $A(x, \lambda) = A_0(x) + A_1(x\lambda)$, где A_0 — вполне непрерывный оператор со значениями в E_0 , $A_1(x, \lambda)$ — вполне непрерывный оператор со значениями в E_1 . Пусть при каждом $y_0 \in E_0$ и $\lambda_0 \in R^n$ уравнение $x = y_0 + A_1(x, \lambda_0)$ имеет единственное решение $x_0 = H(y_0, \lambda_0)$; все эти решения имеют одинаковый индекс γ_0 .

Если F_0 — континуум неподвижных точек оператора $A(x, 0)$, то $T_0 = A_0 F_0$ будет множеством неподвижных точек оператора $B(y, \lambda) = A_0 H(y, \lambda)$. Будем считать, что множества F_0 и T_0 являются гладкими связными n -мерными многообразиями.

Теорема 3. Справедливо равенство

$$\text{ind}(F_0; A) = \text{ind}(T_0; B).$$

Это утверждение является непосредственным обобщением одной теоремы Е. А. Лифшица (6).

5. Рассмотрим автономную систему

$$x^{(m)} = f(x, x', \dots, x^{(m-1)}), \quad x \in R^n, \quad (2)$$

у которой есть изолированное периодическое решение $x^*(t)$ периода ω^* , отличное от состояния равновесия. Будем считать правую часть системы (2) непрерывной в окрестности соответствующего решения $x = x^*(t)$ цикла Γ в фазовом пространстве R^{nm} точек $z = \{x, x', \dots, x^{(m-1)}\}$. Кроме этого будем предполагать, что (в указанной окрестности) решения системы (2) однозначно определяются по начальным значениям. Тогда определен (см. (7)) индекс $\chi(\Gamma)$ цикла Γ . Мы не приводим здесь определения индекса $\chi(\Gamma)$, напомним лишь, что $|\chi(\Gamma)| = 1$, если цикл Γ орбитально асимптотически устойчив в сторону возрастания или убывания t ; отметим также, что вычисление $\chi(\Gamma)$ равносильно вычислению индекса Пуанкаре неподвижной точки точечного преобразования, отвечающего циклу Γ .

Определим теперь на пространстве C_{m-1} заданных на $[0, 1]$ вектор-функций $x(t)$ со значениями в R^n , непрерывных вместе со своими производными $x'(t), \dots, x^{(m-1)}(t)$, вполне непрерывный оператор $A(x, \lambda)$, $\lambda > 0$, равенством

$$A(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{i^j}{j!} x^{(j)}(1) + \\ + \lambda^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} f \left[x(s), \frac{1}{\lambda} x'(s), \dots, \frac{1}{\lambda^{m-1}} x^{(m-1)}(s) \right] ds dt_1 \dots dt_{m-1}. \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что вектор-функция $x_1(t) \in C_{m-1}$ является неподвижной точкой оператора (3) в том и только том случае, если $x_1(t/\lambda)$ является λ -периодическим решением системы (2).

Обозначим через F_0 множество функций $x^*(t + \alpha)$, $0 \leq \alpha < \omega^*$. Из изолированности периодического решения $x^*(t)$ вытекает, что для замкнутого множества F_0 в пространстве C_{m-1} может быть указана такая окрестность G , в которой нет не лежащих на F_0 неподвижных точек оператора (3). Поэтому теорема 1 позволяет определить индекс $\text{ind}(F_0; A)$ континуума F_0 неподвижных точек оператора $A(x, 0)$. Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. Справедливо равенство

$$\text{ind}(F_0; A) = |\chi(\Gamma)|.$$

Эта теорема усиливает принцип родственности, установленный авторами для задачи о периодических решениях автономных систем первого порядка в (7).

6. Как и каждый принцип родственности, теорема 4 позволяет доказывать принципиально новые теоремы существования.

Оператор W , определенный на некотором классе $\mathfrak{M}$ функций $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, называют вольтерровым, если из $x(t) = y(t)$, $-\infty < t \leq t_0$, вытекает, что $Wx(t) = Wy(t)$, $-\infty < t \leq t_0$. Широкие классы вольтерровых операторов образуют различные интегральные операторы с переменным верхним пределом, функциональные преобразования с распределенными аргументами (например, типа $Wx(t) = f[x(t), x(t-h), x'(t), x'(t-h), \dots]$) и т. д. Вольтерров оператор W назовем автономным, если при любом h и любой функции $x(t) \in \mathfrak{M}$ справедливо тождество $Wx(t+h) \equiv Wy(t)$, где $y(t) = x(t+h)$.

Через $R(\lambda) \cdot x(t)$, $\lambda > 0$, $x(t) \in C_{m-1}$, будем обозначать 1-периодическую функцию, совпадающую с $x(t/\lambda)$ при $0 \leq t < 1$. Предположим,

что вольтерров автономный оператор W определен на всех функциях $R(\lambda) \cdot x(t)$, $x(t) \in C_{m-1}$, причем

$$B(\lambda, x)_t = \int_0^t W R(\lambda) x(s) ds, \quad \lambda > 0, \quad x(t) \in C_{m-1},$$

вполне непрерывен как оператор со значениями в C . Если, кроме этого, оператор W преобразует периодические $m-1$ раз непрерывно дифференцируемые функции в непрерывные, то назовем его допустимым.

Из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $x^*(t)$ — изолированное ω^* -периодическое решение системы (2), отличное от состояния равновесия, причем $\chi(\Gamma) \neq 0$. Пусть автономный вольтерров оператор W является допустимым.

Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ у системы

$$x^{(m)} = f(x, x', \dots, x^{(m-1)}) + \varepsilon W x$$

есть по крайней мере одно такое $\omega(\varepsilon)$ -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, что

$$|\omega(\varepsilon) - \omega^*| < \eta$$

и

$$\left\| x(t, \varepsilon) - x^* \left(\frac{\omega^* t}{\omega(\varepsilon)} \right) \right\| < \eta, \quad -\infty < t < \infty.$$

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
11 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, 1956.
² Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митопольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 1963. ³ Ж. Лере, Ю. Шаудер, УМН, 1, № 3—4 (1946). ⁴ М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, 1956. ⁵ П. П. Забрейко, М. А. Красносельский, Сибирск. матем. журн., 5, № 3 (1964). ⁶ Е. А. Лифшиц, ДАН, 165, № 2 (1965).