

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

М. С. БУРГИН

## ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ В $\gamma$ -КАТЕГОРИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 I 1972)

1. В работе <sup>(4)</sup> в категориях, удовлетворяющих аксиомам Хофмана и введенной там аксиоме 7, а в работе <sup>(5)</sup> в  $G$ -примитивных  $\gamma$ -категориях была построена гомологическая алгебра, аналогичная построенной Фрелихом для частных случаев таких категорий (см. <sup>(2-5)</sup>). Аксиомы  $\gamma$ -категории с конечными прямыми произведениями (см. <sup>(7)</sup>) слабее аксиом Хофмана (см. <sup>(14)</sup>). В то же время при построении теории такой гомологической алгебры требование  $G$ -примитивности  $\gamma$ -категории можно заметить (без существенных изменений в доказательствах) требованием из <sup>(4)</sup>:

*Л7. Если  $\alpha$  — центральный идеал (см. <sup>(5)</sup>) и  $g_1 \cdot \text{Coker } \alpha = g_2 \cdot \text{Coker } \alpha$ , то для некоторого морфизма  $h$  справедливо равенство  $g_1 = g_2 + ha$ .*

Сумма  $g_2 + ha$  всегда определена, так как  $\alpha$  — центральный идеал (см. <sup>(5)</sup>). При этом требование аддитивности изучаемых функторов заменяется на более слабое условие сохранения прямого произведения абелевого объекта на произвольный. В дальнейшем только такие функторы и рассматриваются. Аксиома Л7 вытекает из дополнительных требований к  $\gamma$ -категориям (см. <sup>(5)</sup>), а несложная проверка показывает, что этой аксиоме удовлетворяют  $\gamma$ -категории с прямыми произведениями, не являющиеся  $G$ -примитивными (например, категория всех луи). Это значительно расширяет область применения результатов работ <sup>(2-5)</sup> и этой работы.

2. Пусть  $K, K'$  —  $\gamma$ -категории с прямыми произведениями (см. <sup>(7)</sup>),  $K$  удовлетворяет аксиомам  $P1$  (см. <sup>(5)</sup>) и Л7. Тогда для ковариантного по обоим аргументам бифунктора  $F: K \times K \rightarrow K'$  (см. <sup>(10)</sup>) можно построить методом работы <sup>(5)</sup> частные сателлиты и левые производные функторы по первому  $(S_n^{(1)}, L_n^{(1)})$  и по второму  $(S_n^{(2)}, L_n^{(2)})$  аргументам. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только частных сателлитов (ср. с <sup>(14)</sup>). Как и в абелевых категориях (см. <sup>(1, 10, 12)</sup>), справедлива

**Лемма 1.** *Функторы  $S_n^{(1)} S_m^{(2)} F$  и  $S_m^{(2)} S_n^{(1)} F$  эквивалентны.*

Частные сателлиты можно описать аксиоматически с помощью следующих понятий. Набор ковариантных по обоим аргументам бифункторов  $T = \{T_{i_1 \dots i_n}: D \rightarrow R, i_n, n \in \mathbb{Z}\}$  называется связанной полипоследовательностью, если для любого набора  $i_1 \dots i_n$  набор функторов  $\{T_0 = T_{i_1 \dots i_n} = T_{i_1 \dots i_n 0}, T_m = T_{i_1 \dots i_n m}, m \in \mathbb{Z}\}$  является связанной последовательностью в смысле <sup>(5)</sup> по первому аргументу, когда  $n = 2r$ , и по второму аргументу, когда  $n = 2r + 1$ , т. е. с помощью таких наборов для некоторого класса коротких точных последовательностей из  $D$  определены (см. <sup>(1)</sup>, гл. 12; <sup>(5)</sup>) их функторные отображения в категорию комплексов над  $R$ . Связанная полипоследовательность  $T$  называется универсальной (коуниверсальной), если любой морфизм  $\alpha_0: T_0 \rightarrow U_0$  ( $\beta_0: U_0 \rightarrow T_0$ ) однозначно продолжается до морфизма полипоследовательностей  $\alpha: T \rightarrow U$  ( $\beta: U \rightarrow T$ ), где  $U = \{U_{i_1 \dots i_n}\}$  — произвольная

полипоследовательность; и называется положительной, если  $T_{i_1 \dots i_n} = 0$ , когда хотя бы одно  $i_k < 0$ .

**Лемма 2.** *Универсальная (коуниверсальная) связанная полипоследовательность  $T$  однозначно с точностью до эквивалентности определена своей нулевой компонентой  $T_0$ .*

При  $D = D(K)$ ,  $R = K'$  из теоремы 3 работы <sup>(5)</sup> вытекает

**Теорема 1.** *Набор функторов  $T = \{T_{i_1 \dots i_{2n+1}} = S_{i_1}^{(1)} S_{i_2}^{(2)} \dots S_{i_{2n+1}}^{(1)} F, T_{i_1 \dots i_{2n}} = S_{i_1}^{(1)} \dots S_{i_{2n}}^{(2)} F\}$  является коуниверсальной связанной полипоследовательностью.*

Если категория  $K'$  абелева, для бифунктора  $F$  можно построить коуниверсальную связанную последовательность бифункторов, т. е. функтор из  $E(K) \times E(K)$  в  $C(K')$ , где  $E(K')$  — категория коротких центральных точных последовательностей в  $K$ ,  $C(K')$  — категория комплексов над  $K'$ .

Определим сателлит  $S_n F$  бифунктора  $F$  как  $\bigoplus_{i=0}^n C_n^i S_j^{(1)} S_{n-j}^{(2)} F$ . Тогда верна

**Теорема 2.** *Сателлиты  $\{S_n F, n = 1, 2, \dots\}$  бифунктора  $F$  являются положительной коуниверсальной связанной последовательностью бифункторов.*

Частным случаем этой теоремы является аналогичный результат для абелевых категорий из <sup>(12)</sup>.

3. Полученные результаты находят применение в теории центральных расширений в  $\gamma$ -категориях. Напомним (см. <sup>(1, 8)</sup>), что (центральным) расширением  $E$  объекта  $A$  с помощью объекта  $B$  называется точная (с центральным идеалом  $\alpha$ , см. <sup>(5)</sup>) последовательность

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0,$$

а морфизмом расширений — морфизм таких последовательностей.

**Лемма 3.** *Для любого расширения  $E$  объекта  $A$  с помощью  $B$  и любого морфизма  $\tau: B' \rightarrow B$  существует единственное, с точностью до эквивалентности, расширение  $E\tau$  объекта  $A$  с помощью  $B'$  и морфизм  $(1_A, \gamma, \tau): E\tau \rightarrow E$ . Если  $E$  — центральное расширение, то  $E\tau$  — центральное расширение.*

**Следствие.** *Любой морфизм расширений  $(\theta, \gamma, \tau): E_1 \rightarrow E$  можно пропустить через  $E\tau$ , т. е.  $(\theta, \gamma, \tau) = (\theta, \gamma', 1_{B'}) (1_A, \gamma'', \tau)$ .*

**Лемма 4.** *Для любого центрального расширения  $E$  абелевого объекта  $A$  с помощью объекта  $B$  и любого морфизма  $\theta: A \rightarrow A'$ , где  $A'$  — абелев объект из  $K$  (см. <sup>(5)</sup>), существует единственное с точностью до эквивалентности центральное расширение  $\theta E$  и морфизм  $(\theta, \lambda, 1_A): E \rightarrow \theta E$ .*

**Следствие 1.** *Для морфизмов  $\tau$  и  $\theta$  расширения  $\theta(E\tau)$  и  $(\theta E)\tau$  эквивалентны ( $E$  — центральное расширение).*

**Следствие 2.** *Расширение  $E\beta$  эквивалентно прямому произведению  $B \times C$ .*

**Следствие 3.** *Произвольный морфизм расширений  $(\psi, \gamma, \phi): E' \rightarrow E$  влечет эквивалентность расширений  $\psi E$  и  $E'\phi$ .*

Пусть  $\mathcal{E}xt(B, A)$  — множество (см. <sup>(17)</sup>) классов эквивалентных центральных расширений абелевого объекта  $A$  с помощью объекта  $B$ . Используя свойства  $\gamma$ -категорий и уже полученные результаты, можно обычным способом (см. <sup>(1, 6)</sup>) определить сложение центральных расширений и показать, что верна

**Теорема 3.**  *$\mathcal{E}xt$  — бифунктор из прямого произведения  $K \times \mathfrak{A}$  в категорию абелевых групп ( $\mathfrak{A}$  — подкатегория всех абелевых объектов из  $K$ , см. <sup>(5)</sup>).*

Рассмотрим ограничение бифунктора  $\text{Hom}: K \times K \rightarrow \text{St}$  (см. <sup>(12)</sup>) на категорию  $K \times \mathfrak{A}$ . По теореме 1 из <sup>(5)</sup> получим бифунктор в категорию абелевых групп с такими свойствами (см. <sup>(12)</sup>):  $\text{Hom}$  контравариантен и

точен справа по первому аргументу, ковариантен и точен слева по второму аргументу, сохраняет прямые произведения на втором месте.

**Л е м м а 5.** *Бифунктор  $\text{Hom}$  сохраняет на первом месте прямое произведение абелевого объекта на любой объект.*

Следовательно (см. <sup>(3)</sup> и выше), для функтора  $\text{Hom}$  можно построить частные косателлиты и правые производные функторы по первому аргументу. По теореме 5 из <sup>(5)</sup> эти функторы эквивалентны и обозначаются  $\text{Ext}^n$ .

**Т е о р е м а 4.** *Функторы  $\text{Ext}^1$  и  $\mathcal{E}xt$  эквивалентны и, значит, изоморфны абелевы группы  $\text{Ext}^1(B, A)$  и  $\mathcal{E}xt(B, A)$ .*

Доказательство опирается на леммы 3, 4 и либо проводится с помощью непосредственных рассмотрений, либо выводится из результатов работ <sup>(5, 8, 12)</sup>.

**С л е д с т в и е.** *Если  $\pi: S \rightarrow B$ ,  $\pi \in P$ , объект  $S$  проективен в  $K$ , то*

$$\mathcal{E}xt(B, A) \cong \text{Hom}(\text{Ker } \pi / [S, \text{Ker } \pi], A) / \text{Im } \tau(\text{Hom}(S, A)),$$

где  $\tau = \text{Hom}(\text{Ker } \pi, 1_B)$ ,  $[S, \text{Ker } \pi]$  — взаимный коммутант объекта  $S$  и его подобъекта  $\text{Ker } \pi$ .

Частным случаем этого утверждения для групп является теорема из <sup>(9)</sup>, стр. 334.

Точная последовательность (длины  $n - 1$ )

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_0} A_0 \rightarrow 0$$

называется центральной, если  $\text{Im } \alpha_i$  — центральный идеал и  $A_2, \dots, A_n$  — абелевы объекты.

**З а м е ч а н и е.** С помощью центральных точных последовательностей длины  $n$  можно дать интерпретацию групп  $\text{Ext}^n$ , аналогичную полученной в теореме 4 для  $n = 1$ . Когда категория  $K$  абелева, из этой теории вытекают аналогичные результаты работ <sup>(15, 16)</sup>.

Механико-математический факультет  
Московского государственного университета  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
14 I 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Маклейн, Гомология, М., 1966. <sup>2</sup> A. Fröhlich, Proc. Lond. Math. Soc., **11**, 239 (1964). <sup>3</sup> A. Fröhlich, Proc. Lond. Math. Soc., **12**, 739 (1962). <sup>4</sup> P. Lescurtier, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1, 83 (1969). <sup>5</sup> М. С. Бургин, Докл. АН БССР, **14**, № 7 (1970). <sup>6</sup> H. B. Brinkmann, Manuscripta Math., **1**, 99 (1969). <sup>7</sup> М. С. Бургин, УМН, **24**, № 2 (1969). <sup>8</sup> Х. Н. Ипасаридзе, Сообщ. Груз. АН, **30**, № 5 (1963). <sup>9</sup> А. Г. Куроп, Теория групп, М., 1967. <sup>10</sup> А. Картан, С. Эйленбергер, Гомологическая алгебра, М., 1956. <sup>11</sup> F. Hofmann, Acad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 163 (1960). <sup>12</sup> B. Mitchell, Theory of Categories, N. Y.—London, 1965. <sup>13</sup> А. Гротендик, О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., 1958. <sup>14</sup> D. A. Buchsbaum, Ann. Math., **71**, 199 (1960). <sup>15</sup> N. Yoneda, J. Fac. Sci. Tokyo, Sec. 1, 7, 193 (1954). <sup>16</sup> N. Yoneda, J. Fac. Sci. Tokyo, Sec. 1, 8, 507 (1960). <sup>17</sup> М. С. Бургин, Тр. Московск. матем. общ., **22**, 161 (1970).