

М. М. ВАЙНБЕРГ, И. М. ЛАВРЕНТЬЕВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 21 I 1972)

1. В настоящей работе рассматривается класс нелинейных разрывных операторов, к которому применяются вариационные методы исследования задач о собственных векторах, об условном экстремуме и о разрешимости нелинейных уравнений. Из этих предложений, в частности, вытекают теоремы существования решений уравнения Гаммерштейна $u = Bhu$, когда функция $g(u, x)$, порождающая оператор Немыцкого $hu = g(u(x), x)$, разрывна по u . В п. 2 вводится класс разрывных квазипотенциальных операторов, а в п. 3 отмечаются некоторые свойства таких операторов. В п. 4 устанавливаются теоремы об условном экстремуме недифференцируемых функционалов-потенциалов квазипотенциальных операторов, которые применяются в п. 5 к решению задачи о собственных векторах оператора Гаммерштейна. В п. 6 устанавливается теорема о разрешимости уравнения типа Гаммерштейна с разрывным оператором в локально выпуклых пространствах.

2. Пусть E — вещественное нормированное пространство, E^* — пространство, сопряженное с E , и $F: E \rightarrow E^*$. Мы будем предполагать, что функция $\langle F(z + tx), x \rangle$, где $\langle y, x \rangle$ — значение линейного функционала $y \in E^*$ на векторе $x \in E$, суммируема по t на $[0, 1]$ при любых $x, z \in E$.

Рассмотрим функционал

$$f(x) = f_0 + \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle dt. \quad (1)$$

Если отображение $F(x)$ локально ограничено и выполнено равенство (2), то функционал $f(x)$ непрерывен.

Определение 1. Отображение $F: E \rightarrow E^*$ мы назовем квазипотенциальным, если функционал, определенный равенством (1), непрерывен и для любых $x, y \in E$ справедлива формула

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \langle F(y + t(x - y)), x - y \rangle dt. \quad (2)$$

При этом функционал $f(x)$ назовем потенциалом квазипотенциального отображения (оператора) F .

Аналогично определяется квазипотенциальный оператор как на выпуклом множестве $\sigma \in E$, так и в локально выпуклых пространствах.

Примером монотонного квазипотенциального оператора из пространства Лебега L^p в пространство L^q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) может служить оператор Немыцкого ⁽¹⁾ $h: hu = g(u(x), x)$, когда функция $g(u, x)$, порождающая этот оператор, удовлетворяет условиям: 1) она измерима по $x \in G$ при любом $u \in (-\infty, +\infty)$, где G — множество конечной или бесконечной меры s -мерного евклидова пространства; 2) почти при каждом $x \in G$ она не убывает по u и непрерывна справа в точках разрыва; 3) $|g(u, x)| \leq a(x) +$

$+b|u|^{p-1}$; $a(x) \in L^p$, $b > 0$. Потенциал оператора h принимает здесь вид

$$f(u) = f_0 + \int_G dx \int_0^{u(x)} g(v, x) dv,$$

и, так как функция $g(v, x)$ разрывна по v , то функционал $f(u)$ даже не дифференцируем по Гато, т. е. hu в данном случае не есть потенциальный оператор.

Отображение $F: E \rightarrow E^*$ называется слабо радиально непрерывным, если для любых $x, h \in E$ функционал $\langle F(x + th), h \rangle$ непрерывен по $t \in [0, 1]$. Напомним еще, что отображение $F: E \rightarrow E^*$ называется монотонным, если для любых $x, h \in E$

$$\langle F(x + h) - F(x), h \rangle \geq 0,$$

и строго монотонным, если равенство исключено при $h \neq 0$.

3. Отметим следующие свойства квазипотенциальных операторов.

1) Слабо радиально непрерывный квазипотенциальный оператор является потенциальным.

2) Из монотонности квазипотенциального оператора следует слабая полунепрерывность снизу и выпуклость его потенциала.

3) Из компактности квазипотенциального оператора в шаре $D = \{x \in E: \|x\| \leq r, r > 0\}$ следует слабая непрерывность в D его потенциала.

4. Здесь мы приведем два предложения об условном экстремуме недифференцируемых функционалов в вещественном гильбертовом пространстве.

Теорема 1. Пусть $F(x)$ — монотонный квазипотенциальный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H и $f(x)$ — его потенциал.

Тогда, если $x_0 \in S = \{x \in E: \|x\| = r > 0\}$ есть точка локального условного максимума $f(x)$ относительно сферы S , то

$$F(x_0) = \mu x_0,$$

где μ — некоторое вещественное число.

Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H задан гиперболоид ⁽¹⁾

$$\Gamma_c = \{x \in H: ((x)) = c > 0\},$$

$$\varphi(x) = ((x))^2 = \|P_1 x\|^2 - \|P_2 x\|^2,$$

где P_1 и P_2 — проекторы из H на подпространства H_1 и H_2 соответственно ($H = H_1 \oplus H_2$). Тогда, какова бы ни была размерность H_1 и H_2 ,

$$\text{grad } \varphi(x) = 2(P_1 x - P_2 x).$$

Теорема 2. Пусть $(-1)F(x)$ — монотонный квазипотенциальный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H и $f(x)$ — его потенциал.

Тогда, если $x_0 \in \Gamma_c$ есть точка локального условного минимума $f(x)$ относительно гиперболоида Γ_c , то

$$F(x_0) = \mu \text{ grad } \varphi(x),$$

где μ — некоторое вещественное число.

5. Теоремы 1 и 2 приводят к различным предложениям о собственных векторах оператора типа Гиммерштейна BF , где B — линейный оператор и F — квазипотенциальный оператор. Приведем одно такое предложение об операторе Гиммерштейна в отделимых локально выпуклых пространствах.

Пусть E — вещественное рефлексивное локально выпуклое пространство, содержащееся в некотором вещественном гильбертовом пространстве H . Мы будем предполагать, что выполнено условие (α) работы ⁽²⁾, т. е. $E \subset H$, H содержится в сильно сопряженном пространстве E' и плотно в

нем, топологии пространств E и H , а также H и E' соответственно согласованы, билинейный функционал $\langle y, x \rangle$, где $x \in E$, $y \in E'$, совпадает при $y \in H$ со скалярным произведением (x, y) в H . Примеры таких пространств указаны в (2).

Теорема 3. Пусть выполнены условия: 1) пространство E удовлетворяет условию (а); 2) монотонный квазипотенциальный оператор F обращается в нуль в нуль; 3) линейный оператор $B: E' \rightarrow E$ вполне непрерывен, а его сужение на H — самосопряженный положительный оператор.

Тогда оператор BF имеет континуум собственных векторов, причем на каждой сфере $\|x\| = r$ пространства H найдется вектор x_0 такой, что Ax_0 — собственный вектор оператора BF , где $A: H \rightarrow E$ — линейный вполне непрерывный оператор и $B = AA'$.

Замечание 1. Мы не касаемся здесь вопроса о собственных векторах произведения BF , когда B — линейный индефинитный оператор, а F — квазипотенциальный оператор. В случае потенциальности F этот вопрос изложен в (1). Отметим в связи с этим, что из доказательства теорем 13.7, 13.8, 16.4 и 16.5 работы (1) видно, что условия этих теорем могут быть ослаблены. Достаточно лишь потребовать монотонности F и его коэрцитивности в форме (13.8) из (1). Аналогичное замечание по поводу доказательства теоремы 9.4 из (1) представляла теорема 7 из (3).

6. Вариационный метод исследования нелинейных уравнений, развитый в (1), удалось распространить на уравнения с квазипотенциальными операторами. Приведем одно предложение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия: 1) пространство E удовлетворяет условию (а); 2) потенциал $f(x)$ монотонного квазипотенциального оператора F обращается в нуль в нуль; 3) линейный оператор $B: E' \rightarrow E$ вполне непрерывен, а его сужение на H — самосопряженный положительный оператор; 4) функционал

$$\varphi(u) = (u, u) - 2f(Au), \quad u \in H,$$

где оператор A имеет тот же смысл, что и в теореме 3, принимает положительные значения на некоторой сфере $\|u\| = r > 0$ пространства H .

Тогда уравнение $x = BF(x)$ имеет решение, принадлежащее E .

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
19 I 1972

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. М. Вайнберг, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, 1956. ² М. М. Вайнберг, Я. Л. Энгельсон, ДАН, 122, № 5, 755 (1958). ³ М. М. Вайнберг, Р. И. Качуровский, ДАН, 129, № 6, 1199 (1959).