

А. М. ВИНОГРАДОВ

АЛГЕБРА ЛОГИКИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 I 1972)

В этой заметке вводится система «базисных функторов» теории линейных дифференциальных операторов (д.о.), на языке которых дается набор сок теоретико-категорной структуры этой теории. В частности, указан алгебро-категорный смысл гомологий Спенсера, де Рама и гамильтонова формализма. Банальным следствием развитой здесь теории является возможность переноса «естественных» теорем анализа на произвольные коммутативные кольца, равно как и применение современных методов гомологической алгебры для анализа «классических» д.о. Иного рода приложения мы укажем в другом месте.

1. Линейные дифференциальные операторы над коммутативным кольцом K с единицей. Пусть M и N — K -модули и $\Delta: M \rightarrow N$ — некоторое отображение. Для всякого $k \in K$ определим отображения $k\Delta$ и $k^+\Delta: M \rightarrow N$, полагая $(k\Delta)(m) = k \cdot \Delta(m)$, $(k^+\Delta)(m) = \Delta(km)$, $m \in M$. Через $\delta(k)$ обозначим разность $k^+ - k$, понимаемую как оператор, действующий на множестве отображений из M в N .

Основное определение. Аддитивное отображение $\Delta: M \rightarrow N$ называется линейным дифференциальным оператором (д.о.) порядка $\leq s$ над K , если для любого набора $k_0, k_1, \dots, k_s \in K$

$$[\delta(k_0) \circ \delta(k_1) \circ \dots \circ \delta(k_s)](\Delta) = 0.$$

Если кольцо K и рассматриваемая категория модулей над ним имеют дополнительную структуру, то можно говорить о д.о., согласованных с этой структурой. Например, когда K — A -алгебра, мы приходим к A -линейным д.о., а когда K — градуированное кольцо и рассматривается категория градуированных модулей, получаем «градуированные» д.о.

Пусть X — гладкое многообразие и $K = C^\infty(X)$, а M и N — K -модули гладких сечений некоторых векторных расслоений над X . Тогда классический понимаемый д.о. из M в N есть R -линейный д.о. в нашем смысле и наоборот.

Д.о. из M в N образуют по сложению абелеву группу, в которую двойным способом можно ввести K -модульную структуру. Первая структура соответствует умножению $(k, \Delta) \rightarrow k\Delta$, а вторая — $(k, \Delta) \rightarrow k^+\Delta$. Совокупность всех д.о. порядка $\leq s$ из M в N , снабженную первой модульной структурой, обозначим $\text{Diff}_s(M, N)$, а второй — $\text{Diff}_s^+(M, N)$.

Введем «универсальный» модуль Diff_s^+N вместе с «универсальным» д.о. порядка $\leq s$ $D = D(N): \text{Diff}_s^+N \rightarrow N$ так, чтобы для любого M соответствие $h \rightarrow D \circ h$ осуществляло изоморфизм между $\text{Hom}_K(M, \text{Diff}_s^-N)$ и $\text{Diff}_s^+(M, N)$. Наличие этого изоморфизма позволяет определить «другую» модульную структуру в Diff_s^+N , т. е. модуль Diff_sN . Нетрудно убедиться в том, что, положив $\text{Diff}_s^+N = \text{Diff}_s^+(K, N)$, а $D(\Delta) = \Delta(1)$, где $\Delta \in \text{Diff}_s^+(K, N)$, мы получим реализацию модуля Diff_s^+N и оператора $D = D(N)$. Двойственным образом модуль $J^s(M)$ вместе с «универсальным» д.о. порядка $\leq s$ $j = j(N): M \rightarrow J^s(M)$ определим условием,

чтобы для любого N соответствие $h \rightarrow h \circ j$ осуществляло изоморфизм между модулем $\text{Hom}_K(J^s(M), N)$ и $\text{Diff}_s(M, N)$. Как и выше, можно доказать существование $J^s(M)$ и ввести туда другую модульную структуру (т. е. определить модуль $J_+^s(M)$). Так как $\text{Diff}_s N = \text{Diff}_s(K, N) = \text{Hom}_K(J^s, N)$, где $J^s = J^s(K)$, то J^s — представляющий объект для функтора Diff_s .

2. Функторы D_i . Напомним, что дифференцирование кольца K со значениями в модуле N — это такое аддитивное отображение $\Delta: K \rightarrow N$, что $\Delta(k_1 k_2) = k_1 \Delta(k_2) + k_2 \Delta(k_1)$, $k_1, k_2 \in K$. Совокупность дифференцирований K в N образует K -модуль относительно умножения $(k, \Delta) \rightarrow k\Delta$, который обозначим $D(N)$. Очевидно, что всякое дифференцирование является д.о. порядка ≤ 1 , так что определены вложения функтора D в функторы Diff_1 и Diff_1^+ , причем вложение $D \subset \text{Diff}_1^+$ есть д.о. порядка ≤ 1 . В частности, $D(N)$ — подмодуль в $\text{Diff}_1^+ N$.

Пусть S — некоторое подмножество в модуле N . Обозначим через $D(S \subset N)$ совокупность всех таких дифференцирований $\Delta: K \rightarrow N$, что $\Delta(K) \subset S$. Аналогичный смысл, учитывая равенство $\text{Diff}_s^{(+)} N = \text{Diff}_s^{(+)}(K, N)$, придадим символу $\text{Diff}_s^{(+)}(S \subset N)$. Если S — подмодуль, то $D(S \subset N) = D(S)$, но, вообще говоря, это не так.

Определим индуктивно цепочку вложений

$$D_i(N) \subset D_{i-1}(\text{Diff}_1^+ N) \subset \dots \subset D_{i-k}((\text{Diff}_1^+)^k(N)) \subset \dots \subset (\text{Diff}_1^+)^i(N),$$

где любое промежуточное вложение есть д.о. порядка ≤ 1 .

Если $i = 1$, то эта цепочка сводится к уже упомянутому вложению $D(N) \subset \text{Diff}_1^+ N$. Исходя из нее и индуктивного определения $D_i(N) = D\{D_{i-1}(N) \subset (\text{Diff}_1^+)^{i-1}(N)\}$ (мы полагаем $D_0(N) = N$, $D_1(N) = D(N)$), получим требуемое. Построенное таким образом вложение функторов $D_i \subset D_{i-1}(\text{Diff}_1^+)$ обозначим α_i .

3. Комплексы Спенсера. Композиция морфизмов функторов

$$D_i(\text{Diff}_s^+) \xrightarrow{\alpha_i(\text{Diff}_s^+)} D_{i-1}(\text{Diff}_1^+(\text{Diff}_s^+)) \xrightarrow{D_{i-1}(\beta_s)} D_{i-1}(\text{Diff}_{s+1}^+),$$

где $\beta_i: \text{Diff}_1^+(\text{Diff}_s^+) \rightarrow \text{Diff}_{s+1}^+$ — морфизм «композиции дифференциальных операторов, обозначаемая S_{i+s}^1 , для всякого N приводит к последовательности

$$S_n(N): 0 \rightarrow D_n(N) \xrightarrow{S_n^n} D_{n-1}(\text{Diff}_1^+ N) \xrightarrow{S_{n-1}^{n-1}} D_{n-2}(\text{Diff}_2^+ N) \xrightarrow{S_{n-2}^{n-2}} \dots \rightarrow \text{Diff}_n^+ N \xrightarrow{D} N.$$

Эта последовательность — комплекс, всегда точный в двух последних членах. Кроме того, всегда точен комплекс $S_1(N)$. Вообще говоря, комплекс $S_n(N)$ не точен, хотя для некоторых колец K он точен для любых модулей N . Двойственная последовательность (имеется в виду $(J - \text{Diff})$ -двойственность) приводит к аналогичной последовательности, которая в случае, когда $K = C^\infty(X)$, $N = C^\infty(E)$, где E — векторное расслоение над X , есть известная резольвента Спенсера расслоения E . Переходя к пределу согласно цепочке вложений $N = \text{Diff}_0^{(+)} N \subset \text{Diff}_1^{(+)} N \subset \dots \subset \text{Diff}_n^{(+)} N \subset \dots$, получим фильтрованный модуль $\text{Diff}_*^{(+)} N$, а беря «предел последовательностей $S_n(N)$ при $n \rightarrow \infty$ », получим стабильный комплекс

$$(S_*(N)) \dots \rightarrow D_i(\text{Diff}_* N) \xrightarrow{S_*^i} \dots \xrightarrow{S_*^2} D(\text{Diff}_* N) \xrightarrow{S_*^1} \text{Diff}_* N \xrightarrow{D_*} N \rightarrow 0,$$

фильтрованные комплексами $S_n(N)$. Ниже через $\bar{S}_n$, $\bar{S}_*$ будут обозначаться комплексы S_n , S_* с выброшенным оператором D .

4. Гомологии Спенсера. Пусть $\Delta \in \text{Diff}_s(M, N)$. Тогда композиция $\text{Diff}_t^+ M \xrightarrow{D} M \xrightarrow{\Delta} N$ есть д.о. порядка $\leq s + t$, который мы обозначим Δ_t и назовем t -м продолжением оператора Δ . Пусть $h_t = h_t(\Delta): \text{Diff}_t^+ M \rightarrow \text{Diff}_{s+t}^+ N$ — гомоморфизм, отвечающий оператору Δ_t . Переходя к пределу

при $t \rightarrow \infty$, получим гомоморфизм $\text{Diff}_*^+ M \xrightarrow{h_*} \text{Diff}_*^+ N$ фильтрованных модулей. Нетрудно видеть, что $\text{Diff}_*^+ P$ есть $\text{Diff}_*^+ K = \text{Diff}_*^+(K, K)$ — модуль, h_* есть, кроме того, гомоморфизм $\text{Diff}_s^+ K$ -модулей, причем соответствие $\Delta \rightarrow h_*(\Delta)$ устанавливает изоморфизм между $\text{Diff}_*(M, N)$ и $\text{Hom}_{\text{Diff}_*^+ K}^{\Phi}(\text{Diff}_*^+ M, \text{Diff}_*^+ N)$ (Hom^{Φ} — сохраняющие фильтрацию гомоморфизмы). Гомоморфизмы $D_i(h_{n-i}) : D_i(\text{Diff}_{n-i}^+ M) \rightarrow D_i(\text{Diff}_{n-i+s}^+ N)$, $0 \leq i \leq n$, порождают ценное отображение $\bar{S}_n(\Delta) : \bar{S}_n(M) \rightarrow \bar{S}_{n+s}(N)$. Имеем также «стабильный» вариант $\bar{S}_*(\Delta) : \bar{S}_*(M) \rightarrow \bar{S}_*(N)$. Гомологии Спенсера оператора Δ — это гомологии комплекса $\text{coker } S_n(\Delta)$ (или $\text{coker } S_*(\Delta)$). Двойственным образом можно получить когомологии Спенсера.

Из ацикличности комплексов $S_*(M)$ и $S_*(N)$ немедленно следует, что $H_i(\bar{S}_*(\Delta)) = 0$, $i \neq 0, 1$, и $H_0(\bar{S}_*(\Delta)) = \ker \Delta$, $H_1(\bar{S}_*(\Delta)) = \text{coker } \Delta$. Для колец, обладающих свойством, что $S_*(N)$ ацикличен для любого (или «надлежащих») N , это обстоятельство служит источником всевозможных «теорем об индексе».

5. Комплекс де Рама. Модули $\Lambda_i = \Lambda_i(K)$ определим так, чтобы для всех N имело место равенство $D_i(N) = \text{Hom}(\Lambda_i, N)$. Нетрудно проверить, что $\Lambda_i = \bigwedge^i(\Lambda)$, где Λ — K -модуль, порожденный всевозможными символами dk , $k \in K$, которые удовлетворяют соотношениям $d(k_1 k_2) = k_1 dk_2 - k_2 dk_1 = 0$, $k_i \in K$. Всякий д.о. 1-го порядка $\Delta : \Lambda_{i-1} \rightarrow \Lambda_i$ порождает для всякого N отображение

$$\alpha_i(\Delta) : D_i(N) = \text{Hom}(\Lambda_i, N) \rightarrow D_{i-1}(\text{Diff}_1^+ N) = \text{Hom}(\Lambda_{i-1}, \text{Diff}_1^+ N).$$

Оператор $d : \Lambda_{i-1} \rightarrow \Lambda_i$, реализующий отображение $\alpha_i : D_i \rightarrow D_{i-1}(\text{Diff}_1^+)$, т. е. такой, что $\alpha_i = \alpha_i(d)$, назовем оператором «внешнего дифференцирования». Нетрудно видеть, что оператор $d^2 : \Lambda_{i-2} \rightarrow \Lambda_i$ реализует вложение функторов $D_i \xrightarrow{S_n^{n-1} \circ S_n^n} D_{i-2}(\text{Diff}_2^+)$ и поэтому равен нулю, так как $S_n^{n-1} \circ S_n^n = 0$.

Таким образом мы получаем комплекс де Рама кольца $K : \Lambda_0 = K \xrightarrow{d} \Lambda_1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda_i \xrightarrow{d} \dots$. Некоторые взаимосвязи функторов D_i и Diff_k^+ приводят к известным в классическом случае фактам и формулам «исчисления внешних дифференциальных форм». Например, вложение функторов

$$D_{i+j} \subset D_i(D_j)$$

на « Λ -языке» реализуется гомоморфизмом $\Lambda_i \otimes \Lambda_j \rightarrow \Lambda_{i+j}$, что есть не что иное, как операция внешнего умножения.

7. Символы и гамильтонов формализм. Фильтрованному модулю $\text{Diff}_*^{(+)} N$ соответствует градуированный модуль $\overline{\text{Diff}}_* N = \sum_{k \geq 0} \overline{\text{Diff}}_k N$,

$$\text{где } \overline{\text{Diff}}_k N = \text{Diff}_k^{(+)} / \text{Diff}_{k-1}^{(+)} \quad (\text{нетрудно видеть, что мо-}$$

дульные структуры $\overline{\text{Diff}}_k N$ и $\text{Diff}_k^+ N$ совпадают по mod $\text{Diff}_{k-1} N$). $\overline{\text{Diff}}_* N$ есть, очевидно, $\overline{\text{Diff}}_* K$ -модуль. Гомоморфизмы $h_i(\Delta)$ и $h_*(\Delta)$, соответствующие оператору Δ , порождают, в свою очередь, гомоморфизмы $\bar{h}_*(\Delta) : \overline{\text{Diff}}_* M \rightarrow \overline{\text{Diff}}_* N$ и $\bar{h}_i(\Delta) : \overline{\text{Diff}}_i M \rightarrow \overline{\text{Diff}}_{i+t} N$. $\text{smb} \Delta = \bar{h}_0(\Delta)$ — это классический символ оператора Δ . Гомоморфизм $\bar{h}_*(\Delta)$ градуированных $\overline{\text{Diff}}_* K$ -модулей мы будем называть полным символом оператора Δ . Если $K = C^\infty(X)$, то $\text{Diff}_* K$ — алгебра симметрических контравариантных тензорных полей на X . Каждый такой тензор можно отождествить с некоторой функцией на $T^*(X)$, полиномиальной вдоль слоев $\pi^{-1}(x)$, где $\pi : T^*(X) \rightarrow X$ — естественная проекция. В этом состоит «гамильтонова

форма» записи элементов из $\overline{\text{Diff}}_* K$. Аналогично, гамильтонова форма записи элементов модуля $\overline{\text{Diff}}_* N$, $N = C^\infty(E)$, где E — векторное расслоение над X , состоит в представлении их в виде C^∞ -сечений расслоения $\pi^*(E)$, полиномиальных вдоль слоев.

«Гамильтонов формализм» — это способ записи понятий и функторов в категории «символических модулей» $\overline{\text{Diff}}_* N$, отвечающий «гамильтоновой форме» записи этих модулей. Например, нетрудно видеть, что $\text{smb}l[\Delta_1, \Delta_2]$, $\Delta_i \in \text{Diff}_*(K, K)$, зависит только от $\text{smb}l \Delta_i$, $[\Delta_1, \Delta_2] = \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_1$, $i = 1, 2$. Поэтому определено спаривание $(\text{smb}l \Delta_1, \text{smb}l \Delta_2) \rightarrow \text{smb}l[\Delta_1, \Delta_2]$. Если $K = C^\infty(X)$, а f_i — функция на $T^*(X)$, соответствующая $\text{smb}l \Delta_i$, то $\{f_1, f_2\}$ (скобка Пуассона) — функция, соответствующая $\text{smb}l[\Delta_1, \Delta_2]$. При этом гамильтоново векторное поле с гамильтонианом f_1 соответствует дифференцированию кольца $\overline{\text{Diff}}_* K$ вида $\text{smb}l \Delta \rightarrow \text{smb}l[\Delta, \Delta]$.

Связность в K -модуле N — это такой гомоморфизм ∇ кольца $\overline{\text{Diff}}_* K$ в $\overline{\text{Diff}}_*(N, N)$, что $\nabla(1) = 1_N \in \text{Hom}(N, N)$ и для любых $k \in K$ и $v \in \overline{\text{Diff}}_* K$ $\delta(k)[\nabla(v)] = \nabla(\delta(k)(v))$. Тогда для любых $v \in \overline{\text{Diff}}_* K$ и $\Delta \in \overline{\text{Diff}}_i(N, N)$ скобка $[\Delta, v]_\nabla = \Delta \circ v - \nabla(v)\Delta$ есть оператор порядка $\leq s + t - 1$, символ которого зависит только от символов операторов v и Δ . Поэтому можно определить скобку Пуассона $\{\text{smb}l \Delta, \text{smb}l v\}_\nabla = \text{smb}l[\Delta, v]_\nabla \in \overline{\text{Diff}}_{s+t-1} N$. В классическом случае мы таким образом приходим к гамильтонову формализму «со значениями в расслоении E », где $N = C^\infty(E)$.

Отметим в заключение еще следующее.

а) Пусть $\{\Lambda_i^{gr}(\overline{\text{Diff}}_* K)\}$ — комплекс де Рама, соответствующий теории градуированных д.о. над градуированным кольцом $\overline{\text{Diff}}_* K$ и $Tm_i: \Lambda_i(\overline{\text{Diff}}_* K) \rightarrow \Lambda_i^{gr}(\overline{\text{Diff}}_* K)$ — естественное отображение. Когомологии коцепного отображения $Tm = \{Tm_i\}$ есть не что иное, как «когомологии пространства Тома кокасательного расслоения».

б) Назовем оператор $\Delta: M \rightarrow N$ эллиптическим, если его полный символ $\bar{h}_*(\Delta): \overline{\text{Diff}}_* M \rightarrow \overline{\text{Diff}}_* N$ есть «бirationальная» эквивалентность градуированных модулей $\overline{\text{Diff}}_* M$ и $\overline{\text{Diff}}_* N$. Сказанное, в частности, указывает на чисто алгебраическую природу эллиптичности. Алгебраическое обобщение теоремы Атьи — Зингера об индексе мы рассмотрим в отдельной работе.

8. Алгебра логики. Абстрагируясь от конкретного кольца K , рассмотрим функторы $\text{Diff}_s^{(+)}$ и D_i вместе со всеми функторами, порождаемыми ими с помощью обычных и «логических» композиций (например, $\overline{\text{Diff}}_s^{+}(D \subset \overline{\text{Diff}}_s^{+})$). Полученную совокупность функторов обозначим Lg (д.о.). Превратим Lg (д.о.) в категорию, морфизмами которой являются естественные преобразования функторов из Lg (д.о.). Эту категорию мы назовем алгеброй логики теории линейных д.о. Общей теоремой теории линейных д.о. по определению будем называть коммутативную диаграмму в Lg (д.о.), а значение общей теоремы — результат подстановки конкретного модуля в соответствующую коммутативную диаграмму. Сказанное в предыдущих пунктах можно рассматривать как оправдание этих понятий, так как все описанные там результаты суть общие теоремы. Отметим также, что Lg (д.о.) есть «алгебра над обычной алгеброй логики», что связано с возможностью брать «логические композиции».