УДК 519.41

MATEMATUKA

Г. А. ГУРЕВИЧ

к проблеме сопряженности для групп с одним определяющим соотношением

(Представлено академиком II. С. Новиковым 13 III 1972)

Вопрос о разрешимости проблемы сопряженности для групп с одним определяющим соотношением до сих пор остается открытым. В ряде работ решается проблема сопряженности для некоторых классов групп с одним определяющим соотношением. Так, А. А. Фридманом (1) решена проблема сопряженности для групп с соотношением вида $pA(a_1, a_2, ..., a_n) =$ $=B(a_1, a_2, \ldots, a_n) p$, Ньюменом (2) анонсировано решение проблемы сопряженности для групп с кручением, задаваемых одним определяющим соотношением.

I. Следующие три теоремы относятся к проблеме сопряженности для групп с одним определяющим соотношением.

Теорема 1. Проблема сопряженности разрешима в группах с одним определяющим соотношением вида $A(a_i, p) = B(a_i, q)$, где $\partial_p(A)$, $\partial_a(B) \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n.$

Теорема 2. Проблема сопряженности разрешима в группах с одним определяющим соотношением вида $A(a_i, p)B(a_i, q) = \tilde{C}(a_i, q)A(a_i, p)$, где $\partial_p(A) \neq 0, \partial_q(B) + \partial_q(C) \neq 0$ и $i = 1, 2, \ldots, n$.

Эта теорема является обобщением результата А. А. Фридмана (1).

T е о р е м а β . Пусть ∂ ля группы $T = \langle a_1, \ldots, a_n, p, q; R(a_i, p, q) =$ =1» $(\partial_{\sigma}(R)
eq 0)$ существует алгоритм решения уравнений вида $x(a_i, q)Ey(a_i, q) \stackrel{T}{=} D$, где E, D-nроизвольные слова из $T, x, y \neq 1, u$ пусть слово $A(a_i, p)$ начинается и кончается буквой p и буква p существенно входит в A.

Tогда из разрешимости проблемы сопряженности для группы T следует разрешимость проблемы сопряженности для группы $T_1 = \langle \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ $p, q; R(a_i, A(a_i, p), q) = 1$.

Ниже мы приведем схему доказательства теоремы 1. При этом формулировки необходимых лемм будем приводить там, где они используются, и без доказательств. Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично теореме 1.

Пусть $G = \langle \langle a_1, \ldots, a_n, p, q; A(a_i, p) \rangle = B(a_i, q) \rangle$, где $\partial_p(A), \partial_q(B) \neq 0$. Рассмотрим группу $G^* = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, s, s_1, f, p, q; A(b_i, p) = s_i;$ $B(a_i, q) = s; fa_i = b_i f; fs = s_i f \rangle$. По теореме Магнуса «о свободе» (3) f = sправильная проходная буква группы G^* . Основание \overline{G} группы G^* есть свободное произведение групп G' и G'', где $G' = \langle a_1, \ldots, a_n, q, s; B(a_i, q) = s \rangle$, $G'' = \langle b_1, \ldots, b_n, p, s_i; A(b_i, p) = s_i \rangle$. Отметим, что группы G', G''тривиально изоморфны свободным группам.

Пусть $C(a_i, p, q)$ и $T(a_i, p, q)$ — произвольные слова из G и мы хотим узнать, сопряжено ли слово $C(a_i, p, q)$ слову $T(a_i, p_i, q)$ в G. Пусть слова C^* и T^* циклически несократимы в G^* относительно правильной проход-

ной буквы f и $C^* \sim C(a_i, f^{-1}pf, q), T^* \sim T(a_i, f^{-1}pf, q).$ Лемма 1. Слова $C(a_i, p, q)$ и $T(a_i, p, q)$ сопряжены в группе G

тогда и только тогда, когда слова C^* и T^* сопряжены в группе G^* . Лемма 2. По слову $C(a_i, p, q)$ можно эффективно построить слово C^* , причем либо C^* не содержит букву f, либо $C^* = C_1 f^{-1} E_1 f \dots C_m f^{-1} E_m f$,

 $\hat{\epsilon}$ де $npu\ i=1,\,2,\ldots,\,m$ слова C_i содержат только буквы $a_1,\ldots,\,a_n,\,q,\,a$ сло $\hat{\epsilon}$ а E_i — только буквы $b_1,\ldots,\,b_n,\,p.$

Возможны 2 случая: 1) слово C^* содержит букву f; 2) слово C^* не со-

держи**т букву** f.

1) Пусть слово C^* содержит букву f. Тогда, если $C^* \sim T^*$, то некоторая пиклическая перестановка C^* сопряжена T^* в G^* словом, не содержащим букву f (4). Поскольку число различных циклических перестановок слова конечно, достаточно построить алгоритм, распознающий, сопряжены ли слова C^* и T^* в G^* словом, не содержащим букву f. Пусть существует та-

кое X, что $XC^*X^{-1}\stackrel{G^*}{=}T^{*}$ и $\partial_f(X)=0$. Тогда в силу леммы 2 и теоремы A (5) $T^* \equiv T_1f^{-1}H_1f\dots T_mf^{-1}H_mf$ (при $i=1,\,2,\,\dots,\,n$ слова T_i содержат только буквы $a_1,\dots,\,a_n,\,q$, а слова H_i — только буквы $b_1,\dots,\,b_n,\,p$) и найдутся слова $Y(a_i,\,s)\,,\,Z(a_i,\,s_1)$ такие, что

Рассмотрим уравнение

$$T_j^{-1}Z_{j-1}(a_i, s) C_j = Y_j(a_i, s).$$
 (2)

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$T_j \equiv Z_{j-1}(a_i, B(a_i, q)) C_j Y_j^{-1}(a_i, B(a_i, q)).$$

 Π емма 3. Π усть $\Gamma_{\rm i},\ \Gamma_{\rm 2}$ — конечно порожденные подгруппы свободной группы F.

Тогда существует алгоритм, который по произвольным словам K, L из F узнает, принадлежит ли K двойному смежному классу $\Gamma_1 L \Gamma_2$.

Пусть слова $N_j(a_i, s)$ и $M_j(a_i, s)$ такие, что $T_j \stackrel{\widetilde{G}}{=} M_j(a_i, s) C_j N_j(a_i, s)$. Подставляя выражение для T_j в (2), получим

$$C_j^{-1}M_j^{-1}Z_{j-1}C_j \stackrel{\overline{G}}{=} N_jY_j. \tag{3}$$

Используя результат Д. И. Молдаванского (6), можно доказать, что уравнение (3) эквивалентно системе из двух показательных уравнений $M_j^{-1}Z_{j-1} \equiv R_j^{\kappa_j}$, N_j , $Y_j \equiv Q_j^{\kappa_j}$, причем R_j , Q_j эффективно находятся по словам N_j , M_j , C_j . Таким образом, систему (1) можно свести к эквивалентной ей системе показательных уравнений в свободной группе. Алгоритм, распознающий, разрешима ли эта система, легко строится.

2) Слово C^* не содержит букву f. Это возможно только, когда слово C^* не содержит одновременно букв p и q. Пусть, для определенности, сло-

ва C^* и T^* не содержат букву p. В этом случае $C^* \stackrel{G^*}{\sim} T^*$ тогда и только тогда, когда найдется n такое, что система

$$Z_1(a_i, q) X_1(a_i, s) Z_1^{-1}(a_i, q) \stackrel{\overline{G}}{=} T^*$$

имеет решение (4).

Можно показать, что если взято минимальное n, при котором система (4) имеет решение и $\{Z_i^0,\dots,Z_{n+1}^j,\,X_i^0,\dots,\,X_n^0\}$ — решение этой системы, то при $i=1,\,2,\,\dots,\,n-1$ $X_i^0\not\sim X_{i+1}^0$. С другой стороны, если $\{Z_{i}^{0},\ldots,Z_{n+1}^{0},X_{i}^{0},\ldots,X_{n}^{0}\}$ — решение, то

$$Z_{n+1}^{0}C^{*}(Z_{n+1}^{0})^{-1} \equiv X_{n}^{0}(a_{i}, B(a_{i}, q)),$$

$$Z_{n}^{0}X_{n}^{0}(b_{i}, A(b_{i}, p))(Z_{n}^{0})^{-1} \equiv X_{n-1}^{0}(b_{i}, A(b_{i}, p)),$$

$$Z_{n-1}^{0}X_{n-1}^{0}(a_{i}, B(a_{i}, q))(Z_{n-1}^{0})^{-1} \equiv X_{n-2}^{0}(a_{i}, B(a_{i}, q)),$$

$$\vdots$$

$$Z_{n}^{0}X_{n}^{0}(a_{i}, B(a_{i}, q))(Z_{n}^{0})^{-1} \equiv T^{*}.$$
(1)

Лемма 4. Если $D(b_i, p) \nsim D_1(b_i, p)$ а $D(b_i, E) \sim D_1(b_i, E)$, причен $\partial_p(E) \neq 0$, то $E = E_1E_2E_0E_2^{-1}E_3$, где $\partial_p(E_1) = \partial_p(E_0) = \partial_p(E_2) = 0$, начинается с буквы p, и npu некотором целом l одно из слов D, D, conp.s. жено E_0^l , а другое — $(E_1^{-1}pE_3^{-1})^l$.

Из (4) и (5), используя лемму 4, можно вывести, что

- a) $A(a_i, p) \equiv A_1 A_2 A_0 A_2^{-1} A_3$, $B(a_i, q) \equiv B_1 B_2 B_0 B_2^{-1} B_3$,
- где $\partial_p(A_2)=\partial_p(A_0)=\partial_p(A_3)=0,\ \partial_q(B_1)=\partial_q(B_0)=\partial_q(B_3)=0.$ б) Найдутся слова $L_1,\ L_2$ и целые числа $t_1,\ t_2$ такие, что $L_1\sim L_2,\ B_0(a_i)\equiv L_1^{t_1},A_0(a_i)\equiv L_2^{t_2}.$ в) Слова C^* и T^* сопряжены в G^* тогда и только тогда, когда найдутся целые числа k и n такие, что одно из слов C^* , T^* , сопряжено в свободной группе $A_0^h(a_i)$, а другое — $[B(a_i, q)]^{1/2}k(l_1/l_2)(n-3)$.
- II. Как показано в (7), группы с кручением, задаваемые одним определяющим соотношением, имеют вид

$$F = \langle a_1, \ldots, a_n; R^k(a_i) = 1 \rangle, k > 1.$$

Автору удалось доказать следующие утверждения, первое из которых является некоторым усилением теоремы 3 из (2).

- 1) Если непустое несократимое слово A равно 1 в F, то некоторое подслово слова A имеет вид $T^{k-1}T_1$, где T— некоторая циклическая перестановка слова R или ему обратного, $T \equiv T_1T_2$ и слово T_1 содержит все буквы, входящие в слово R (слово R— циклически несократимо);
- 2) в группе F разрешима проблема сопряженности по подгруппе, порожденной произвольным подалфавитом группы;
 - 3) в группе F разрешима обобщенная проблема сопряженности *;
 - 4) в группе F разрешима проблема извлечения кория;
- 5) подгруппа группы F, порожденной произвольным подалфавитом алфавита F, изолирована;
 - 6) нормализатор любого неедипичного элемента группы тривиален.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 22 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Фридман, X Всесоюзн. алгебр. коллоквиум, Новосибирск, 1969. ² В. В. Newman, Bull. Am. Math. Soc., 74, № 3 (1968). ³ W. Magnus, J. Reine angew. Math., 163 (1930). ⁴ D. J. Collins, J. Symb. Logic, 32, № 3 (1967). ⁵ J. L. Britton, Ann. Math., 77 (1963). ⁶ Д. И. Молдаванский, IX Всесоюзн. алгебр. коллоквиум, Гомель, 1968. ⁷ А. Karrass, W. Magnus, D. Solitar, Comm. pure and appl. math., 13 (1960).

Убобщенная проблема сопряженности для группы F состоит в распознавании сопряженности в группе F произвольного слова слову из подгруппы, порожденной произвольным подалфавитом алфавита F.