

УДК 519.41

МАТЕМАТИКА

Г. А. ГУРЕВИЧ

К ПРОБЛЕМЕ СОПРЯЖЕННОСТИ ДЛЯ ГРУПП С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 13 III 1972)

Вопрос о разрешимости проблемы сопряженности для групп с одним определяющим соотношением до сих пор остается открытым. В ряде работ решается проблема сопряженности для некоторых классов групп с одним определяющим соотношением. Так, А. А. Фридманом ⁽¹⁾ решена проблема сопряженности для групп с соотношением вида $pA(a_1, a_2, \dots, a_n) = B(a_1, a_2, \dots, a_n)p$, Ньюменом ⁽²⁾ анонсировано решение проблемы сопряженности для групп с кручением, задаваемых одним определяющим соотношением.

1. Следующие три теоремы относятся к проблеме сопряженности для групп с одним определяющим соотношением.

Теорема 1. Проблема сопряженности разрешима в группах с одним определяющим соотношением вида $A(a_i, p) = B(a_i, q)$, где $\partial_p(A), \partial_q(B) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 2. Проблема сопряженности разрешима в группах с одним определяющим соотношением вида $A(a_i, p)B(a_i, q) = C(a_i, q)A(a_i, p)$, где $\partial_p(A) \neq 0, \partial_q(B) + \partial_q(C) \neq 0$ и $i = 1, 2, \dots, n$.

Эта теорема является обобщением результата А. А. Фридмана ⁽¹⁾.

Теорема 3. Пусть для группы $T = \langle a_1, \dots, a_n, p, q; R(a_i, p, q) = 1 \rangle$ ($\partial_q(R) \neq 0$) существует алгоритм решения уравнений вида $x(a_i, q)E y(a_i, q) \stackrel{T}{=} D$, где E, D — произвольные слова из T , $x, y \neq 1$, и пусть слово $A(a_i, p)$ начинается и кончается буквой p и буква p существенно входит в A .

Тогда из разрешимости проблемы сопряженности для группы T следует разрешимость проблемы сопряженности для группы $T_1 = \langle a_1, \dots, a_n, p, q; R(a_i, A(a_i, p), q) = 1 \rangle$.

Ниже мы приведем схему доказательства теоремы 1. При этом формулировки необходимых лемм будем приводить там, где они используются, и без доказательств. Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично теореме 1.

Пусть $G = \langle a_1, \dots, a_n, p, q; A(a_i, p) = B(a_i, q) \rangle$, где $\partial_p(A), \partial_q(B) \neq 0$. Рассмотрим группу $G^* = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, s, s_1, f, p, q; A(b_i, p) = s_i; B(a_i, q) = s; f a_i = b_i f; f s = s_i f \rangle$. По теореме Магнуса «о свободе» ⁽³⁾ f — правильная проходная буква группы G^* . Основание $\bar{G}$ группы G^* есть свободное произведение групп G' и G'' , где $G' = \langle a_1, \dots, a_n, q, s; B(a_i, q) = s \rangle$, $G'' = \langle b_1, \dots, b_n, p, s_i; A(b_i, p) = s_i \rangle$. Отметим, что группы G', G'' тривиально изоморфны свободным группам.

Пусть $C(a_i, p, q)$ и $T(a_i, p, q)$ — произвольные слова из G и мы хотим узнать, сопряжено ли слово $C(a_i, p, q)$ слову $T(a_i, p, q)$ в G . Пусть слова C^* и T^* циклически несократимы в G^* относительно правильной проходной буквы f и $C^* \sim_{G^*} C(a_i, f^{-1} p f, q), T^* \sim_{G^*} T(a_i, f^{-1} p f, q)$.

Лемма 1. Слова $C(a_i, p, q)$ и $T(a_i, p, q)$ сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда слова C^* и T^* сопряжены в группе G^* .

Лемма 2. По слову $C(a_i, p, q)$ можно эффективно построить слово C^* , причем либо C^* не содержит буквы f , либо $C^* \equiv C_1 f^{-1} E_1 f \dots C_m f^{-1} E_m f$,

Можно показать, что если взято минимальное n , при котором система (4) имеет решение и $\{Z_1^0, \dots, Z_{n+1}^0, X_1^0, \dots, X_n^0\}$ — решение этой системы, то при $i = 1, 2, \dots, n-1$ $X_1^0 \approx X_{i+1}^0$. С другой стороны, если $\{Z_1^0, \dots, Z_{n+1}^0, X_1^0, \dots, X_n^0\}$ — решение, то

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^0 C^* (Z_{n+1}^0)^{-1} &\equiv X_n^0 (a_i, B(a_i, q)), \\ Z_n^0 X_n^0 (b_i, A(b_i, p)) (Z_n^0)^{-1} &\equiv X_{n-1}^0 (b_i, A(b_i, p)), \\ Z_{n-1}^0 X_{n-1}^0 (a_i, B(a_i, q)) (Z_{n-1}^0)^{-1} &\equiv X_{n-2}^0 (a_i, B(a_i, q)), \\ &\vdots \\ Z_1^0 X_1^0 (a_i, B(a_i, q)) (Z_1^0)^{-1} &\equiv T^*. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Лемма 4. Если $D(b_i, p) \approx D_1(b_i, p)$ а $D(b_i, E) \sim D_1(b_i, E)$, причем $\partial_p(E) \neq 0$, то $E \supseteq E_1 E_2 E_3 E_2^{-1} E_3$, где $\partial_p(E_1) = \partial_p(E_2) = \partial_p(E_3) = 0$, E_1 начинается с буквы p , и при некотором целом l одно из слов D, D_1 сопряжено E_0^{-l} , а другое — $(E_1^{-1} p E_3^{-1})^l$.

Из (4) и (5), используя лемму 4, можно вывести, что

a) $A(a_i, p) \equiv A_1 A_2 A_0 A_2^{-1} A_3$, $B(a_i, q) \equiv B_1 B_2 B_0 B_2^{-1} B_3$,

где $\partial_p(A_2) = \partial_p(A_0) = \partial_p(A_3) = 0$, $\partial_q(B_1) = \partial_q(B_0) = \partial_q(B_3) = 0$.

б) Найдутся слова L_1 , L_2 и целые числа t_1 , t_2 такие, что $L_1 \sim L_2$, $B_0(a_i) \equiv L_1^{t_1}$, $A_0(a_i) \equiv L_2^{t_2}$.

в) Слова C^* и T^* сопряжены в G^* тогда и только тогда, когда найдутся целые числа k и n такие, что одно из слов C^* , T^* , сопряжено в свободной группе $A_0^h(a_i)$, а другое — $[B(a_i, q)]^{1/k(l_1/l_2)(n-3)}$.

II. Как показано в (7), группы с кручением, задаваемые одним определяющим соотношением, имеют вид

$$F = \langle\langle a_1, \dots, a_n; R^k(a_i) = 1 \rangle\rangle, \quad k \geq 1.$$

Автору удалось доказать следующие утверждения, первое из которых является некоторым усилением теоремы 3 из (2).

1) Если непустое несократимое слово A равно 1 в F , то некоторое подслово слова A имеет вид $T^{k-1}T_1$, где T — некоторая циклическая перестановка слова R или ему обратного, $T \neq T_1T_2$ и слово T_1 содержит все буквы, входящие в слово R (слово R — циклически несократимо);

2) в группе F разрешима проблема сопряженности по подгруппе, порожденной произвольным подалфавитом группы;

3) в группе F разрешима обобщенная проблема сопряженности *;

4) в группе F разрешима проблема извлечения корня;

5) подгруппа группы F , порожденной произвольным подалфавитом алфавита F , изолирована;

(6) нормализатор любого неединичного элемента группы тривиален.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Фридман, X Всесоюз. алгебр. коллоквиум, Новосибирск, 1969. ² В. В. Newman, Bull. Am. Math. Soc., 74, № 3 (1968). ³ W. Magnus, J. Reine angew. Math., 163 (1930). ⁴ D. J. Collins, J. Symb. Logic, 32, № 3 (1967). ⁵ J. L. Britton, Ann. Math., 77 (1963). ⁶ Д. И. Молдавский, IX Всесоюз. алгебр. коллоквиум, Гомель, 1968. ⁷ A. Karrass, W. Magnus, D. Solitar, Comm. pure and appl. math., 13 (1960).

* Обобщенная проблема сопряженности для группы F состоит в распознавании сопряженности в группе F произвольного слова слову из подгруппы, порожденной произвольным подалфавитом алфавита F .