Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 1

УДК 517.942.7:519.2 *МАТЕМАТИКА*

В. И. ЗАЛЯПИН, член-корреспондент АН СССР Л. А. ЛЮСТЕРНИК

О СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ ПУАССОНОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ

В работах ([1,2]) была предложена некоторая вероятностная схема, позволяющая естественным образом изучать и интерпретировать различные свойства одного класса специальных функций, а также строить их обобщения, в том числе и на случай многих переменных. Оказалось, что некоторое расширение вышеуказанной схемы позволяет применить аналогичные методы при исследовании классических многочленов, а также при построении различного рода их обобщений.

1. Мы будем в дальнейшем пользоваться следующими обозначениями: $A=(a_i^j)$, $i=1,\ldots,n+k$; $j=1,\ldots,k$,— целочисленная матрица, $\mathbf{a}_i$ — вектор, составленный из элементов i-го столбца; $\mathbf{a}^j$ — вектор, составленный из элементов j-й строки матрицы A. Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — векторы одинаковой размерности n с координатами (x_i) и (y_i), то $\mathbf{x}^\mathbf{y}=\prod\limits_{i=1}^n x_i^{y_i}$; $\Gamma(\mathbf{x})=\prod\limits_{i=1}^n\Gamma(x_i)$, $\Gamma(x_i)$ — гамма-функция Эйлера, $S(\mathbf{x})=\sum\limits_{i=1}^n x_i$; $\exp(\mathbf{x})=\exp S(\mathbf{x})$, $\bar{S}(A)=(S(\mathbf{a}_i))$ — вектор, координатами которого являются суммы элементов соответствующих столбцов матрицы A. Если $D=(D_1,\ldots,D_n)$, $D_i=\partial/\partial x_i$, а $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ — вектор, все координаты которого целые неотрицательные числа, то будем писать

$$D^\mathbf{k}=\partial^{S(\mathbf{k})}/\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}.$$

2. Рассмотрим E_n — n-мерное эвклидово пространство. Зададим в E_n систему векторов $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n+k}$ таких, что первые n из них образуют базис, а оставшиеся разлагаются по базису так, что

$$A\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \vdots\\ \mathbf{e}_{n+k}\end{pmatrix}=0. \tag{1}$$

Заметим, что матрица A в соотношении (1) всегда может быть приведена к виду

$$A=\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1\ldots a_n^1 & c_1 & 0\ldots 0\\ a_1^2 & a_2^2\ldots a_n^2 & 0 & c_2\ldots 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_1^k & a_2^k\ldots a_n^k & 0 & 0\ldots c_k\end{pmatrix},\quad c_j\neq 0,\quad j=1,\ldots,k,$$

в силу линейной независимости векторов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$.

Произвольный вектор $\mathbf{x}\in E_n$ разложим по системе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{n+k}$:

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n+k}x_i\mathbf{e}_i.$$

Числа (x_i) назовем обобщенными барицентрическими координатами (о.б.к.) вектора $\mathbf{x}$. В силу (1) векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}+\mathbf{m}A$ совпадают, $\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_k)$. Множество векторов из E_n с их о.б.к. обозначим через E_n^k. Вектор $\mathbf{k}\in E_n^k$ назовем целочисленным, если у него существуют целые о.б.к. Множество целочисленных векторов образуют в E_n^k сеть, которую в дальнейшем будем обозначать Ω_n^k $(\Omega_n^0=\Omega_n)$.

3. В E_n^k рассмотрим случайное блуждание, выходящее из начала координат с однородной переходной функцией $P(\mathbf{x},\mathbf{y})=P(0,\mathbf{y}-\mathbf{x})$. Положим

$$P(0,\mathbf{x})=\begin{cases}p_i, & \mathbf{x}=e_i,\\ 0, & \mathbf{x}\neq e_i, \quad i=1,2,\ldots,n+k.\end{cases}$$

Вероятность того, что случайное блуждание за l шагов попадает в точку $\mathbf{k}\in\Omega_n^k$, будет

$$P_l(\mathbf{k})=\begin{cases}\dfrac{S(\mathbf{k}+\mathbf{m}A)!}{(\mathbf{k}+\mathbf{m}A)!}\,\mathbf{p}^{\mathbf{k}+\mathbf{m}A}, & S(\mathbf{k}+\mathbf{m}A)=l,\\ 0, & S(\mathbf{k}+\mathbf{m}A)\neq l;\end{cases}$$

Здесь $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_{n+k})$, $\mathbf{m}\in\Omega_k$.

Будем считать, что скачки случайного блуждания регулируются пуассоновским потоком, параметр которого без ограничения общности можно считать равным единице. Вероятность $P_t(\mathbf{k})$ попасть за время t в точку $\mathbf{k}\in\Omega_n^k$ в этом случае будет

$$P_t(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{m}\in\Omega_k}e^{-t}\frac{(t\mathbf{p})^{\mathbf{k}+\mathbf{m}A}}{(\mathbf{k}+\mathbf{m}A)!}=e^{-t}G_{\mathbf{k}}(t\mathbf{p}).$$

Вероятности $P_t(\mathbf{k})$ удовлетворяют дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{\partial P_t(\mathbf{k})}{\partial t}=-\left[P_t(\mathbf{k})-\sum_{i=1}^{n+k}P_t(\mathbf{k}-\mathbf{e}_i)\,p_i\right].$$

Пусть $\Phi_t(\mathbf{u})=\sum\limits_{\mathbf{k}\in\Omega_n^k}\mathbf{u}^{\mathbf{k}}P_t(\mathbf{k})$ — производящая функция для $P_t(\mathbf{k})$. Тогда, учитывая указанное уравнение, получим

$$\Phi_t(\mathbf{u})=\exp(-t(1-\mathbf{pu})),\quad \mathbf{pu}=\sum_{i=1}^{n+k}p_iu_i.$$

Отсюда формула производящей функции для $G_{\mathbf{k}}(t\mathbf{p})$

$$\exp(t\mathbf{pu})=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{u}^{\mathbf{k}}G_{\mathbf{k}}(t\mathbf{p}).$$

Описанная схема удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена, откуда теорема сложения для функций $G_{\mathbf{k}}(t\mathbf{p})$ имеет вид

$$G_{\mathbf{k}}(t\mathbf{p}+\tau\mathbf{p})=\sum_{\mathbf{l}\in\Omega_n^k}G_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}(t\mathbf{p})\,G_{\mathbf{l}}(\tau\mathbf{p}).$$

Учитывая соотношение $P_t(\mathbf{k})=e^{-t}G_{\mathbf{k}}(t\mathbf{p})$ и формулу производящей функции, получим

$$\mathbf{k}\cdot G_{\mathbf{k}}(t\mathbf{p})=\sum_{i=1}^{n+k}(tp_iG_{\mathbf{k}-\mathbf{e}_i})\,\mathbf{e}_i,$$

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_n^k}\mathbf{k}G_{\mathbf{k}}(t\mathbf{p})=e^t\sum_{i=1}^{n+k}tp_i\mathbf{e}_i.$$

Следует отметить, что указанная вероятностная схема может быть интерпретирована как некоторая задача теории массового обслуживания ([2]).

4. В $(n+k)$-мерном векторном пространстве зададим псевдометрику следующим соотношением: назовем длиной вектора $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{n+k})$ такое число ρ (вообще говоря комплексное), что

$$\mathbf{z}^{\overline{S}(A)} = \rho^{\overline{S}(A)}. \tag{2}$$

Пространство с таким образом определенной псевдометрикой назовем сверхгиперболическим пространством H_n^k. В H_n^k рассмотрим множество векторов, определяемое соотношениями

$$\mathfrak{S}_{n,k}^{\rho}\colon\ \mathbf{z}^{\mathbf{a}^j} = \rho^{S(\mathbf{a}^j)}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Определим в $\mathfrak{S}_{n,k}^{\rho}$ аналог полярной системы координат: если $\mathbf{z} \in \mathfrak{S}_{n,k}^{\rho}$, то положим

$$\mathbf{z} = \rho \cdot e^{\overline{\varphi}} = (\rho e^{\varphi_1}, \ldots, \rho e^{\varphi_{n+k}}),$$

где ρ определяется в (2) — длина вектора $\mathbf{z}$, а $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+k})$ — вектор-аргумент вектора $\mathbf{z}$:

$$\varphi_j = \ln(z_j / \rho), \quad j = 1, 2, \ldots, n+k.$$

Из (3) следует, что вектор-аргумент удовлетворяет уравнению

$$\overline{\varphi} \cdot A^T = 0; \tag{4}$$

A^T — транспонированная матрица A (см. п. 1).

Введем в $\mathfrak{S}_{n,k}^{\rho}$ покомпонентное умножение векторов: $\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (z_1^1 \cdot z_1^2, \ldots, z_{n+k}^1 \cdot z_{n+k}^2)$. Если $\mathbf{z}_1 = re^{\overline{\varphi}}$, $\mathbf{z}_2 = \rho \cdot e^{\overline{\psi}}$, то $\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = r \cdot \rho \cdot e^{\overline{\varphi} + \overline{\psi}}$ — длины перемножаются, а вектор-аргументы складываются. Заметим, что умножение вектора из $\mathfrak{S}_{n,k}^{\rho}$ на вектор $\widetilde{\mathbf{z}} = e^{\overline{\psi}}$ не выводит нас из $\mathfrak{S}_{n,k}^{\rho}$. Будем называть умножение на $e^{\overline{\psi}}$ поворотом вектора $\mathbf{z} \in \mathfrak{S}_{n,k}^{\rho}$ на вектор-аргумент $\overline{\varphi}$.

Для $\mathbf{z} \in \mathfrak{S}_{n,k}^{\rho}$ определим

$$G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m} \in \Omega_k} \frac{\mathbf{z}^{\mathbf{k} + \mathbf{m}A}}{(\mathbf{k} - \mathbf{m}A)!}. \tag{5}$$

$G_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ аналитична всюду, за исключением, быть может, начала координат. Положив $\mathbf{z} = \rho \cdot e^{\overline{\varphi}}$ и учитывая (4), получим

$$G_{\mathbf{k}}(\rho \cdot e^{\overline{\varphi}}) = e^{\mathbf{k}\overline{\varphi}} \cdot \sum_{\mathbf{m}} \frac{\rho^{S(\mathbf{k}+\mathbf{m}A)}}{(\mathbf{k} + \mathbf{m}A)!} = e^{\mathbf{k}\overline{\varphi}} \cdot G_{\mathbf{k}}(\rho).$$

Используя изложенные рассуждения, так же как в ([1]) и ([2]), можно получить для функций $G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$, $G_{\mathbf{k}}(\rho)$ все соотношения, справедливые при $\mathbf{z} = t\mathbf{p}$ (см. п. 3), а также многие другие.

5. Используя разложение производящей функции $\exp(\mathbf{zu})$ в ряд Лорана по $\mathbf{u}$ или в ряд Фурье по системе $\{e^{i\mathbf{k}\overline{\varphi}}\}_{\mathbf{k} \in \Omega_n^k}$, получим интегральное представление функций $G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$:

$$G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathfrak{N}} \mathbf{u}^{\mathbf{Q}} \cdot \exp(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})\, dS, \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{k} - \sum_{1}^{n+k} \mathbf{e}_i,$$

$\mathfrak{N}$ — n-мерный тор с естественной мерой dS на нем;

$$G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{|W_n^k|} \int_{W_n^k} \exp(\mathbf{z}\mathbf{u}(\overline{\varphi}) - i\mathbf{k}\overline{\varphi})\, d\omega_n^k,$$

W_n^k — область Дирихле сети Ω_n^k, $|W_n^k|$ — ее объем, $c_j = -1$.

6. Заметим, что из определения (5) легко следует

$$\partial G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) / \partial z_i = G_{\mathbf{k} - \mathbf{e}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+k;$$

откуда, учитывая (1), получим, что $G_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют уравнению

$$D^{\overline{S}_1(A)} G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = D^{\overline{S}_2(A)} G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z});$$

здесь $\bar{S}_1(A)$ — вектор, составленный из неотрицательных компонент вектора $\bar{S}(A)$, $\bar{S}_2(A)$ — вектор, составленный из модулей отрицательных компонент вектора $\bar{S}(A)$. Пользуясь параметризацией $\mathbf{z} = \rho \cdot e^{\varphi}$, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для функций $G_{\mathbf{k}}(\rho)$.

7. Пример 1. Многочлены Эрмита. Рассмотрим E_1^1, $A=(1, -2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x_1 + m, x_2 - 2m)$;

$$G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \sum_m \frac{z_1^{k_1+m} z_2^{k_2-2m}}{(k_1+m)!\,(k_2-2m)}, \quad G_n(-1, 2x) = \frac{1}{n!} H_n(x).$$

Используя выведенные в пп. 1—6 свойства функций $G_{\mathbf{k}}(\mathbf{z})$, получим

$$dH_n(x)\,/\,dx = 2H_{n-1}(x) \cdot n \text{ — дифференцирование,}$$

$$\exp(2zu - u^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} H_k(z) \text{ — производящая.}$$

Теоремы сложения:

$$(\sqrt{2})^n H_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k H_{n-k}(z_1\sqrt{2}) \cdot H_k(z_2\sqrt{2}),$$

$$H_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_2^k H_{n-k}(z_1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^k H_{n-k}(z_2).$$

Уравнение (с учетом рекуррентных соотношений)

$$\frac{d^2}{dx^2} H_n(x) - 2x \frac{d}{dx} H_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

8. Пример 2. Многочлены Лагерра. Рассмотрим E_2^1, $A = (1, -1, 1)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1 + m, x_2 - m, x_3 + m)$. В силу (1)

$$G_{k_1k_2k_3}(\rho) = G_{k_1-k_3,\,k_2+k_3}(\rho) = G_{n_1n_2}(\rho) = \sum_{m=0}^{n_2} \frac{\rho^{n_1+n_2+m}}{m!\,(n_2-m)!\,(n_1+m)!}.$$

Рассмотрим множество $\rho < 0$; тогда

$$G_{n_1n_2}(\rho) = \frac{\rho^{n_1+n_2}}{(n_1-n_2)!} L_{n_2}^{n_1}(-\rho).$$

Производящая функция:

$$\exp\left[-x\left(u_1 - u_2 + \frac{u_2}{u_1}\right)\right] = \sum_{n_1,\,n_2} u_1^{n_1} u_2^{n_2} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{n_1+n_2}}{(n_1+n_2)} L_{n_2}^{n_1}(x).$$

Рекуррентное соотношение:

$$L_{n_2}^{n_1}(x) = L_{n_2-1}^{n_1}(x) + L_{n_2}^{n_1-1}(x), \qquad L_{n_2}^{n_1}(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k L_{n_2-m+k}^{n_1-k}(x).$$

Дифференцирование:

$$\frac{d}{dx} L_{n_2}^{n_1}(x) = -L_{n_2+1}^{n_1-1}(x).$$

Теоремы сложения:

$$\frac{(x+y)^{n_1+n_2}}{(n_1+n_2)!} L_{n_2}^{n_1}(x-y) = \sum_{l_1l_2} \frac{x^{n_1+n_2-l_1-l_2} y^{l_1+l_2}}{(n_1+n_2-l_1-l_2)!\,(l_1+l_2)!} L_{n_2-l_2}^{n_1-l_1}(x)\, L_{l_2}^{l_1}(y);$$

$$\lambda^{n_1+n_2} L_{n_2}^{n_1}(\lambda x) = \sum_{l_1l_2} (\lambda-1)^{l_1+l_2} C_{n_1+n_2}^{l_1+l_2} L_{n_2-l_2}^{n_1-l_1}(x)\, L_{l_2}^{l_1}(y), \quad y = (\lambda-1)x;$$

$$L_{n_2}^{n_1}(2x) = \frac{1}{2^{n_1+n_2}} \sum_{l_1l_2} C_{n_1+n_2}^{l_1+l_2} L_{n_2-l_2}^{n_1-l_1}(x)\, L_{l_2}^{l_1}(x).$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, УМН, 25, 4 (154), 11 (1970). [2] Л. А. Люстерник, ДАН, 177 (1967), № 5.