

С. И. ИБРАГИМОВ

О ПОЛНОТЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векун 28 II 1972)

Настоящая статья посвящена нахождению условия полноты системы функций $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ при различных предположениях относительно функций $F(z)$, $\varphi(z)$ и распределения точек последовательности $\{\alpha_k\}$ различных между собой комплексных чисел.

Заметим, что рассматриваемая система $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ является непосредственным обобщением системы функций $\{F(\alpha_k z)\}$, $\varphi(z) \equiv z$, которая впервые рассматривалась А. О. Гельфондом ⁽¹⁾, затем А. И. Маркушевичем ⁽²⁾, И. И. Ибрагимовым ⁽³⁾ и другими авторами. В этих исследованиях предполагалось, что у порождающей аналитической или целой аналитической функции $F(z)$ все коэффициенты Тейлора отличны от нуля. Естественно возникает вопрос: что можно сказать о полноте системы $\{F(\alpha_k z)\}$ или более общей системы аналитических функций $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$, если некоторая подпоследовательность коэффициентов Тейлора порождающей функции $F(z)$ обращается в нуль, т. е. $F^{(v_k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$? Этот вопрос полностью исследован в настоящей работе.

Прежде всего обозначим через $A(D)$ пространство функций, аналитических в области D . Напомним, что система $\{f_n(z)\}$, $n = 0, 1, \dots$, регулярных в конечной односвязной области D функций $f_n(z)$ полна в этой области тогда и только тогда, когда для любой регулярной в дополнении $\overline{CD}$ к области D и равной нулю на бесконечности функции $\gamma = \gamma(\xi)$ условия

$$\int_{\Gamma} f_n(z) \gamma(z) dz = 0$$

влекут за собой тождество $\gamma(z) \equiv 0$, контур $\Gamma = \Gamma_\gamma$ таков, что функции $f_n(z)$ регулярны внутри Γ и на нем, а функция $\gamma = \gamma(\xi)$ регулярна вне Γ и на нем.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $F(z) \in A(|z| < R)$ — ограниченная функция такая, что некоторые подпоследовательности ее тейлоровских коэффициентов равны нулю: $F^{(v_k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Далее, пусть $\varphi(z) \in A(|z| < R)$, $|\varphi(z)| \leq R_1 < R$ при $|z| < R$ и $\{\alpha_k\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $|\alpha_k| \leq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|)$ расходится.

Тогда, для того чтобы система $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ была полной в пространстве $A(|z| < R)$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{[\varphi(z)]^{\lambda_k}\}$, где $\{\lambda_k\} = \{k\} \setminus \{v_k\}$, была полной в пространстве $A(|z| < R)$.

Доказательство. Необходимо и достаточно. Допустим, что функции системы $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_2} F[\alpha_k \varphi(z)] \gamma(z) dz = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $|\alpha_k| \leq 1$, $R_1 < R_2 < R$, а функция $\gamma(z)$ регулярна вне контура $|z| = R_1$ и в бесконечности обращается в нуль.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_2} F[\xi\varphi(z)] \gamma(z) dz. \quad (2)$$

Заметим, что $\Phi(\xi) \in A(|\xi| \leq 1)$, так как $|\xi\varphi(z)| \leq |\xi| \cdot |\varphi(z)| \leq R_1 < R_2$. Соотношения (1) показывают, что $\Phi(\alpha_k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, т. е. числа α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, являются нулями функции $\Phi(\xi)$. В силу известной теоремы единственности ограниченных аналитических в конеч-

ном круге функций $\Phi(\xi) \equiv 0$, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|)$ расходится. Разложим функцию $F[\xi\varphi(z)]$ в ряд Тейлора:

$$F[\xi\varphi(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \xi^k [\varphi(z)]^k.$$

Подставляя значение $F[\xi\varphi(z)]$ в соотношение (2), получим

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_2} \gamma(z) [\varphi(z)]^k dz \right) \xi^k \equiv 0 \quad (3)$$

при условии, что $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = \infty$. Заметим, что некоторые члены ряда (3), с номерами v_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, равны нулю в силу условия теоремы $F^{(v_k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а остальные члены равны нулю в силу теоремы единственности степенного ряда:

$$\int_{|z|=R_2} \gamma(z) [\varphi(z)]^{\lambda_k} dz = 0, \quad (4)$$

где $\{\lambda_k\} = \{k\} \setminus \{v_k\}$. В силу критерия полноты системы аналитических функций, если система $\{[\varphi(z)]^{\lambda_k}\}$ полна в $A(|z| < R)$, то из (4) следует, что $\gamma(z) \equiv 0$. Таким образом, в силу условия (1), из полноты системы аналитических функций $\{[\varphi(z)]^{\lambda_k}\}$ в $A(|z| < R)$, следует полнота системы функций $\{F(\alpha_k \varphi(z))\}$.

Необходимость можно доказать также и методом, приведенным в (3).

Достаточность. Пусть для системы аналитических функций $\{[\varphi(z)]^{\lambda_k}\}$ выполняется условие (4); из него и из условий теоремы следует тождество (3). Благодаря тождеству (3) можно утверждать, что точки последовательности $\{\alpha_k\}$ являются нулями функции $\Phi(\xi)$, т. е.

$$\Phi(\alpha_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда вытекает, что если система аналитических функций $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ полна в пространстве $A(|z| < R)$, то имеем: $\gamma(z) \equiv 0$. Наконец, при $\gamma(z) \equiv 0$ и при наличии равенства (4) система аналитических функций $\{[\varphi(z)]^{\lambda_k}\}$ полна в пространстве $A(|z| < R)$.

Из теоремы 1, в частности, в случае, когда $\varphi(z) \equiv z$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $F(z) \in A(|z| < R)$ — ограниченная функция такая, что некоторые тейлоровские коэффициенты ее равны нулю: $F^{(v_k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и $\{\alpha_k\}$ — последовательность комплексных чисел, расположенных в единичном круге $|\alpha_k| \leq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, такая,

что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|)$ расходится.

Тогда, для того чтобы система $\{F(\alpha_k z)\}$ была полной в пространстве $A(|z| < R)$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{z^{\lambda_k}\}$, где $\{\lambda_k\} = \{k\} \setminus \{v_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, была полной в пространстве $A(|z| < R)$.

В случае, когда все тейлоровские коэффициенты функции $F(z)$ отличны от нуля, мы приходим к соответствующему результату И. И. Ибрагимова ⁽³⁾.

Пусть $F(z)$ и $\varphi(z)$ принадлежат пространству $A(|z| < \infty)$ и система аналитических функций $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ удовлетворяет условиям

$$\Phi(\alpha_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} F[\alpha_k \varphi(z)] \gamma(z) dz = 0, \quad (5)$$

т. е. целая функция $\Phi(\xi)$ обращается в нуль в точках последовательности $\{\alpha_k\}$.

Известно, что целая функция $\Phi(\xi)$, имеющая нули в точках последовательности $\{\alpha_k\}$, тождественно равна нулю, если имеет место неравенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{\ln M_{\Phi}(r)} > 1, \quad (6)$$

где $M_{\Phi}(r) = \max_{|\xi|=r} |\Phi(\xi)|$, $N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$ — функция Неванлинны по-

следовательности $\{\alpha_k\}$, $n(r)$ — число точек $\{\alpha_k\}$, находящихся внутри круга $|\xi| \leq r$. Полагая $M_{\varphi}(\rho) = \max_{|z|=\rho} |\varphi(z)|$ и имея в виду, что $M_{\Phi}(r) \leq AM_F[rM_{\varphi}(\rho)]$, заметим, что неравенство (6) остается в силе, если справедливо неравенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{\ln M_F[rM_{\varphi}(\rho)]} > 1. \quad (7)$$

Следовательно, при условии (7) имеем $\Phi(\xi) \equiv 0$.

А теперь разложим функцию $F[\xi \varphi(z)]$ в ряд Тейлора и подставим его в выражение $\Phi(\xi)$; тогда получим

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \gamma(z) [\varphi(z)]^{\lambda_k} dz \right) \xi^k \equiv 0 \quad (8)$$

при условии (7).

В силу условия теоремы,

$$\int_{|z|=\rho} [\varphi(z)]^{\lambda_k} \gamma(z) dz = 0 \quad (9)$$

также при условии (8), где $\{\lambda_k\} = \{k\} \setminus \{v_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

В силу критерия полноты, из соотношений (9) следует, что если система аналитических функций $\{[\varphi(z)]^{\lambda_k}\}$ полна в пространстве $A(|z| < R)$, то $\gamma(z) \equiv 0$, и потому, как показывают равенства (5), полна также система функций $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ в пространстве $A(|z| < R)$. Как это делалось в доказательстве теоремы 1, мы убеждаемся в том, что из полноты системы функций $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ в пространстве $A(|z| < R)$ следует полнота системы функций $\{[\varphi(z)]^{\lambda_k}\}$ в пространстве $A(|z| < R)$ при условии (7), т. е. доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $F(z) \in A(|z| < \infty)$, $\varphi(z) \in A(|z| < \infty)$ и некоторая подпоследовательность тейлоровских коэффициентов функции $F(z)$ равна нулю, т. е. $F^{(v_k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}$ такова, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{\ln N_F[rM_{\varphi}(\rho)]} > 1.$$

Тогда, для того чтобы система $\{F[\alpha_k \varphi(z)]\}$ была полной в $A(|z| < R \vee R)$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{[\varphi(z)]^{\lambda_k}\}$, где $\{\lambda_k\} = \{k\} \setminus \{v_k\}$, была полной в пространстве $A(|z| < R \vee R)$.

В случае, когда $\varphi(z) \in A(|z| < R)$ и $|\varphi(z)| \leq R_1$ при $|z| < R_1$, теорема 2 остается в силе с той только разницей, что в ее формулировке $M_F[rM_\varphi(\rho)]$ заменится на $M_F(R_1 r)$.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $F(z) \in A(|z| < \infty)$ — целая аналитическая функция с равными нулю подпоследовательностями коэффициентов Тейлора $F^{(\nu_k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}$ такова, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{\ln M_F(rR_1)} > 1.$$

Тогда, для того чтобы система $\{F(\alpha_k z)\}$ была полной в $A(|z| < R \vee R)$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{z^{\lambda_k}\}$, где $\{\lambda_k\} = \{k\} \setminus \{\nu_k\}$, была полной в пространстве $A(|z| < R \vee R)$.

Отсюда следует также соответствующая теорема И. И. Ибрагимова⁽²⁾.

Институт кибернетики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
7 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ A. Gelfond, Матем. сборн., 4 (46), 1, 119 (1939). ² А. И. Маркушевич, Матем. сборн., 17 (59), 2, 211 (1945). ³ И. И. Ибрагимов, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 45 (1949).