

А. Л. КРЫЛОВ

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТОСФЕРЫ С ТОКОВЫМ СЛОЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 III 1972)

Интерес к двумерным моделям обтекания магнитосферы Земли солнечным ветром объясняется, с одной стороны, тем, что двумерные модели доступнее для изучения благодаря наличию мощного аппарата теории аналитических функций, а с другой стороны, ограниченностью и грубостью имеющихся в нашем распоряжении как экспериментальных, так и теоретических фактов о существе физических процессов, имеющих место при обтекании.

Физические основы применяемых предположений обсуждались весьма подробно (см., например, (1-5)). В частности, двумерная модель, предложенная в (1, 2), широко обсуждается, обсчитывается и истолковывается в свете новых наблюдательных данных (6-8). Напомним, что эта модель дает дипольную в целом картину силовых линий внутри магнитосферы (рис. 1а). Однако в настоящее время можно считать твердо установленным экспери-

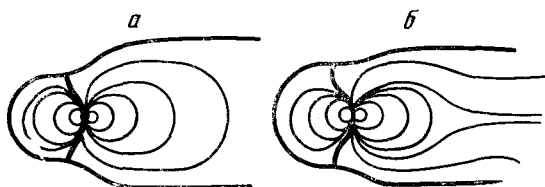


Рис. 1

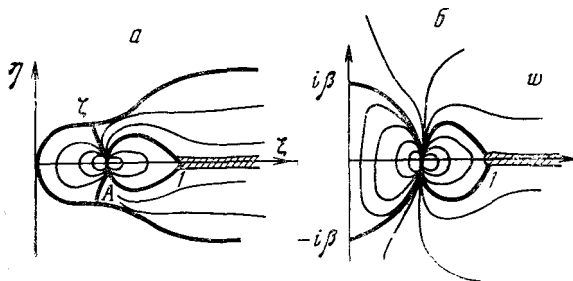


Рис. 2

ментально (наблюдательно) и теоретически, что поведение силовых линий на ночной стороне весьма сильно отличается от приведенного на рис. 1а (см. (4, 5, 8, 9)). А именно, в «хвосте» на расстоянии $\sim 10 R_0$ имеется токовый (нейтральный) слой горячей плазмы, вдоль которого тангенциальная компонента поля имеет разрыв (поле направлено в противоположные стороны), а нормальная исчезает (рис. 1б). В работах (4, 5) рассматривались некоторые нестационарные задачи, связанные с возникновением токового слоя, в частности, было дано объяснение его возникновения в критических точках магнитного поля, в которых не исчезает электрическое поле.

В настоящей работе мы возвращаемся к стационарной постановке ранних работ (1, 2), однако, в соответствии с вышесказанным, потребуем наличия у магнитного поля топологии силовых линий, указанных на рис. 1б. Это приводит нас к задаче теории функций, которая допускает решение в квадратурах.

Пусть магнитосфера находится в области, ограниченной кривой S на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2); Земля находится в точке $\zeta = A$ ($1 > A > 0$

вещественное), токовый слой начинается в точке $\xi = 1$ и тянется вправо вдоль вещественной оси. Магнитное поле $B = (B_{\xi}, B_{\eta})$ описывается аналитической функцией $B(\xi) = B_{\xi}(\xi) + iB_{\eta}(\xi)$, имеющей потенциал (комплексный) $f(\xi): B(\xi) = f(\xi)$. Функция $f(\xi)$ и кривая S , ограничивающая магнитосферу, находятся из следующих условий (¹, ²) — кроме условия на токовом слое):

1_ξ) $f(\xi)$ — аналитическая функция внутри S , кроме точки $\xi = A$ и луча $\eta = 0, \xi \geq 1$;

2_ξ) $\operatorname{Im} f(\xi) = 0$ на S ;

3_ξ) $f(\xi)$ имеет в точке $\xi = A$ полюс первого порядка (то соответствует дипольному характеру B вблизи Земли);

4_ξ) $\operatorname{Im} f(\xi) = \text{const}$ на луче $\eta = 0, \xi \geq 0$ — условия обтекания полем токового слоя;

5_ξ) На границе магнитосферы $|df/d\eta| = p_0 = \text{const}$ (условие равенства магнитного давления и давления солнечного ветра).

Отобразим внутренность S на правую полуплоскость комплексной переменной w ; это (неизвестное пока) отображение запишем в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(w), & \xi(0) &= 0, \\ \xi(1) &= 1, \end{aligned} \quad (1)$$

и будем искать потенциал $f(w)$ в правой полуплоскости w , удовлетворяющий условиям

1_w) $f(w)$ аналитична всюду при $\operatorname{Re} w > 0$, кроме точки $w = a$ и луча $v = 0, u \geq 0$;

2_w) $\operatorname{Im} f(w) = 0$ на $\operatorname{Re} w = 0$;

3_w) $f(w)$ имеет в точке $w = a$ полюс первого порядка;

4_w) $\operatorname{Im} f(w) = \text{const}$ на луче $v = 0, u \geq 1$.

Из условия 2_w, применяя принцип симметрии (¹⁰), получаем возможность продолжения $f(w)$ на левую полуплоскость с разрезом, а из условия 4_w — продолжения $f(w)$ на риманову поверхность функции (типа) Жуковского

$$w = 2 \left/ \left(z + \frac{1}{z} \right) \right., \quad (2)$$

двулистно накрывающую плоскость w , с листами, склеенными по лучам $v = 0, u \geq 1$ и $u \leq -1$. Отобразив плоскость w на плоскость z с помощью преобразования (2), мы получаем потенциал $f(z)$ в плоскости z , удовлетворяющий условиям

1_z) $f(z)$ аналитична во всей z -плоскости, кроме точек $z = \pm a, \pm 1/a$, где она имеет полюса первого порядка;

2_z) $f(z) = f(1/z)$ — это следствие того, что $w = 2 / (z + 1/z)$;

3_z) $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$ при $|z| = 1$ и при $\operatorname{Re} z = 0$.

Из рис. 3, анализируя топологию силовых линий (т. е. линий уровня $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$), можно указать все особые точки функции $f(z)$, т. е. в нашем случае точки, где $f'(z)$ имеет нули или полюса:

I) $f'(z)$ имеет полюса второго порядка в точках $z = \pm a, \pm 1/a$ (это полюса первого порядка функции $f(z)$);

II) $f'(z)$ имеет полюса первого порядка в точках $z = \pm i$ (это точки ло-

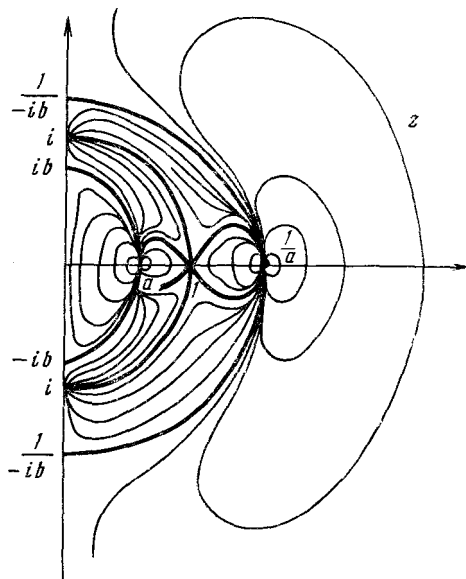


Рис. 3

гарифмических особенностей $f(z)$, в окрестности которых $\text{Im } f(z)$ имеет «радиальные» линии уровня);

III) $f'(z)$ имеет нули второго порядка в точках $z = \pm 1$ (тогда линии уровня $\text{Im } f(z)$ устроены как линии уровня $\text{Im } z^2$, т. е. как на рис. 3).

IV) $f'(z)$ имеет нули первого порядка в точках $z = \pm ib, \pm 1/(ib)$ (тогда линии уровня $\text{Im } f(z)$ устроены как линии уровня $\text{Im } z^2$, т. е. как на рис. 3).

По этим свойствам функция $f'(z)$, и, значит, $f(z)$ восстанавливается однозначно:

$$f'(z) = \frac{(z^2 + b^2)(z^2 + 1/b^2)(z^2 - 1)^2}{(z^2 + 1)(z^2 - a^2)^2(z^2 - 1/a^2)^2}, \quad (3)$$

$$f(z) = \int_0^z \frac{(z^2 + b^2)(z^2 + 1/b^2)(z^2 - 1)}{(z^2 + 1)(z^2 - a^2)^2(z^2 - 1/a^2)^2} dz. \quad (4)$$

Переходя на плоскость $w = 2/(z + 1/z)$, получим

$$f(w) = \frac{2\alpha^4}{\beta^2} \int_0^w \frac{(w^2 + \beta^2) \sqrt{1 - w^2}}{(w^2 - \alpha^2)^2} dw, \quad (5)$$

где $\alpha = \{1/2(a + 1/a)\}^{-1}$, $\beta = \{1/2(1/B - b)\}^{-1}$ — произвольные положительные числа, $\alpha < 1$, $\alpha = w(a)$, $i\beta = w(ib)$.

Для определения отображения $\xi = \xi(w)$ (и потенциала $f(\xi) = f(w(\xi))$) обратимся к условию 5₂:

$$\left| \frac{d\eta}{dv} \right| = p_0 \left| \frac{df}{dw} \right|_{w=iv} = p_0 \frac{|v^2 - \beta^2| \sqrt{1 + v^2}}{(v^2 + \alpha^2)^2}. \quad (6)$$

С учетом условия монотонности $\eta(v)$, получим

$$\eta(v) = p_0 \int_0^v \frac{|v^2 - \beta^2| \sqrt{1 + v^2}}{(v^2 + \alpha^2)^2} dv, \quad v \geq 0$$

$$\eta(v) = -\eta(-v), \quad v \leq 0. \quad (7)$$

Зная мнимую часть $\eta = \text{Im } \xi$ функции $\xi(w)$, аналитичной для $\text{Re } w > 0$, можно узнать и всю функцию с помощью интеграла Шварца ⁽¹⁰⁾:

$$\xi(w) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(v) \frac{dv}{v - iw}$$

и вещественную часть ее $\xi(v)$ на оси $u = 0$:

$$\xi(v) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(v') \frac{dv'}{v' - v}.$$

Последние интегралы, однако, расходятся из-за роста $\eta(v')$ при $v' \rightarrow \infty$. Поэтому для эффективного вычисления обоих интегралов лучше считать не $\xi(w)$, а $\xi' = d\xi/dw$ — аналитическую функцию в полуплоскости $\text{Re } w > 0$, для которой, как и для $\xi(w)$, задана на мнимой оси v мнимая часть $\eta'(v) = |df/dv|$ — четная функция v . $f'(v)$ убывает на оси, как $1/v$, и интегралы сходятся.

$$\xi'(w) = -\frac{p_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|v^2 - \beta^2| \sqrt{1 + v^2}}{|v^2 + \alpha^2|^2} \frac{dv}{v - iw}, \quad (8)$$

$$\xi'(v) = -\frac{p_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|v^2 - \beta^2| \sqrt{1 + v^2}}{|v^2 + \alpha^2|^2} \frac{dv'}{v' - v}. \quad (9)$$

Эти формулы с последующим интегрированием по w и по v решают задачу восстановления отображения $\xi(w)$ и нахождения $f(\xi)$ и границы S .

Квадратуры (8), (9) могут быть эффективно сосчитаны на ЭВМ (непосредственно или с помощью рядов). Более важна, однако, принципиальная возможность построения, а также некоторые простые асимптотические формулы. Например, из (6) имеем, очевидно, асимптотическую оценку

$$\eta'(v) \sim v^{-1}, \quad v \rightarrow \infty. \quad (10)$$

С помощью несложной выкладки отсюда можно получить, используя (9), (10),

$$\xi'(v) \sim v^{-1} \ln v, \quad v \rightarrow \infty,$$

что дает после исключения v и интегрирования

$$\eta(\xi) \sim \xi^{1/2}, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Асимптотика (11) показывает расширяющее действие токового слоя на полость (при отсутствии слоя асимптотика имеет вид $\eta \sim \text{const}$ ⁽¹⁾).

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступила
1 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Н. Жигулев, Е. А. Ромишевский, ДАН, **127**, № 5, 1001 (1959). ² J. Hurley, Phys. Fluids, **4**, 854 (1961). ³ G. Atkinson, T. Unti, Geophys. Res., **74**, 6275 (1969). ⁴ С. И. Сыроватский, ЖЭТФ, **60**, 1727 (1971). ⁵ Б. В. Сомов, С. И. Сыроватский, ЖЭТФ, **61**, 1864 (1971). ⁶ Геофизика, М., 1964. ⁷ Космическая физика, М., 1966. ⁸ Б. А. Тверской, Динамика радиационных поясов Земли, «Наука», 1968. ⁹ N. F. Ness, Rev. Geophys., **7**, 97 (1969). ¹⁰ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1965.