

Н. А. ЛУКЬЯНОВ

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О СМЕШАННОМ
ДО- И СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА
В СОПЛЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 21 III 1972)

Рассматривается задача о построении поля потока безвихревого установившегося течения совершенного газа в осесимметричном сопле конечной длины при сверхкритическом перепаде давления. Система уравнений движения записывается в безразмерных переменных

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{c\rho}{r} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

где $\rho = \rho(u, v)$ — известная функция. Решение этих уравнений $u = u(x, r)$ и $v = v(x, r)$ ищется в области G , ограниченной плоскостью $x = x_n$ на входе в сопло, стенкой сопла $r_N = r_N(x)$, осью симметрии $r = 0$ и предельной характеристикой C_{-0} , выходящей из центра сопла и пересекающей стенку сопла в точке (x_n, r_n) . Положение этой точки неизвестно и должно быть определено в ходе решения задачи, поэтому контур сопла задается также и в окрестности критического сечения.

На дозвуковой части границы может быть задан только один из элементов, определяющих вектор скорости. Скорость на входе в сопло дозвуковая, поэтому в этом сечении не может быть задано поле скоростей, а задается только один элемент, определяющий вектор скорости, например,

$$v = v(x_n, r). \quad (2)$$

Условия на стенке сопла $dr_N/dx = v^2/u$ для $x_n \leq x \leq x_n$ и на оси симметрии $v = 0$ при $r = 0$. На правом конце области G граничные условия не задаются, так как решается задача для уравнений смешанного эллиптического-гиперболического типа в области, пересекаемой линией параболличности.

Эта задача в рассмотренной выше постановке не решена, но имеется ряд решений задачи о сопле методом установления, например (1). Вследствие гиперболичности исходной системы уравнений на входе в сопло задается не один элемент, определяющий вектор скорости, а все поле скорости

$$u = u(x_n, r), \quad v = v(x_n, r), \quad (3)$$

не зависящее от времени. Решения, удовлетворяющие этому граничному условию, не учитывают влияния дозвуковой части контура сопла на поле потока в окрестности входного сечения сопла, а это влияние значительно при конечных длинах реальных сопел.

В данной заметке изложен приближенный метод решения прямой задачи о сопле в точной постановке. На левом конце области G удовлетворяется граничное условие (2), т. е. поле потока во входной части сопла строится с учетом передачи возмущений от стенки сопла вверх по потоку.

Используя «простой метод интегральных соотношений» (2), систему уравнений (1) заменяем аппроксимирующей системой обыкновенных

уравнений

$$du_i/dx = P_i/Q_i, \quad dv_i/dx = H_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (4)$$

где u_i и v_i — проекции скорости $\lambda_i = (u_i^2 + v_i^2)^{1/2}$ на оси x, r соответственно цилиндрической системы координат в узлах интерполяции; P_i, Q_i и H_i — известные функции от $x, r_N, u_0, u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N$, индекс $i=0$ соответствует оси, а $i=N$ — стенке сопла. Граничных условий на входе в сопло (2) недостаточно для построения нужного решения уравнений (4). При замыкании задачи необходимо иметь еще N условий, которые позволили бы учесть влияние формы границы области G на поле потока в сечении $x = x_n$. Уравнения (4) в критическом сечении сопла ($dr_N/dx = 0$) имеют стационарную особую точку типа «седла», в которой $Q_i = 0, i = 0, 1, \dots, N$. Ищется голоморфное решение, поэтому условия $P_i = 0, i = 0, 1, \dots, N$, когда $dr_N/dx = 0$, дополняют краевую задачу недостающими условиями, которые позволяют учесть влияние области G на поле потока во входном сечении и обеспечивают единственность решения прямой задачи о сопле. Таким образом, краевая задача о поле в точной постановке замыкается путем использования условий регулярности в стационарной особой точке системы уравнений (4).

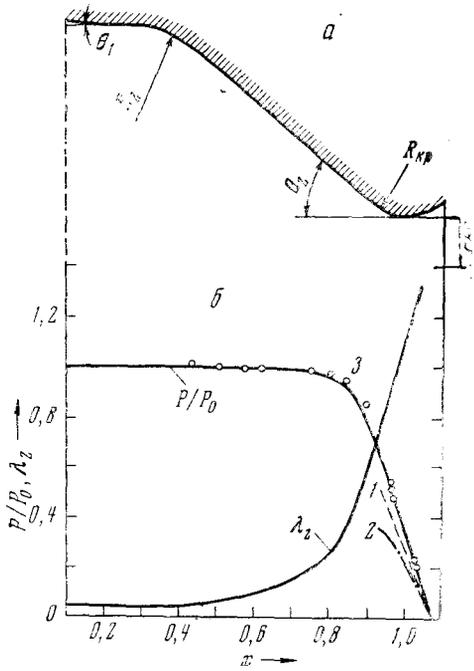


Рис. 1

Для приближенного решения задачи использовалась аппроксимирующая система уравнений при $N = 2$

$$\sum_{j=0}^2 A_{ij} \frac{du_j}{dx} + B_{i1} \frac{dv_1}{dx} = F_{1i}, \quad \bar{a}_{i2} \frac{du_2}{dx} + a_{i2} \frac{dv_1}{dx} = F_{2i}, \quad (5)$$

где $i = 1, 2$;

$$F_{11} = -r_2^{-1} \left[\frac{dr_2}{dx} \left(\sum_{j=0}^2 a_{1j} \rho_j u_j - \rho_1 u_1 \right) + 2a_{11} \rho_1 v_1 + a_{12} \rho_2 v_2 + 2\rho_1 v_1 \right] + a_{12} b_2 u_2^2 v_2 \frac{d^2 r_2}{dx^2},$$

$$F_{21} = 2r_2^{-1} (u_1 - u_0) + r_2^{-1} \frac{dr_2}{dx} (2v_1 - a_{11} v_1 - a_{12} v_2) - a_{12} u_2 \frac{dr_2}{dx},$$

$$F_{12} = r_2^{-1} \left[\frac{dr_2}{dx} \left(2\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1 - \sum_{j=0}^2 a_{2j} \rho_j u_j \right) + 2(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) - 2a_{21} \rho_1 v_1 - a_{22} \rho_2 v_2 \right] + a_{22} b_2 u_2^2 v_2 \frac{d^2 r_2}{dx^2};$$

$$F_{22} = 2r_2^{-1} (u_2 - u_1) + \frac{dr_2}{dx} r_2^{-1} (2v_2 - v_1 - a_{21} v_1 - a_{22} v_2) - a_{22} u_2 \frac{d^2 r_2}{dx^2};$$

$$A_{i0} = a_{i0} [1/2 \rho_0 + (\rho_0 / [\kappa + 1 - (\kappa - 1) u_2^2] - b_0)];$$

$$A_{i1} = a_{i1} (\rho_1 - b_1 u_1^2), \quad A_{i2} = a_{i2} (\rho_2 - b_2 u_2^2);$$

$$B_{i1} = -a_{i1} b_1 u_1 v_1;$$

$$b_j = 2(\kappa + 1)^{-1} [1 - (\kappa - 1) \lambda_j^2 / (\kappa + 1)]^{(2-\kappa)/(\kappa+1)}; \quad \bar{a}_{i2} = a_{i2} \frac{dr_2}{dx}$$

и a_{ij} — постоянные коэффициенты, значения которых определяются видом квадратурных формул, используемых при вычислении интегралов.

Краевая задача решалась путем пристрелки, т. е. с помощью последовательного решения задач Коши для уравнений (5). В процессе решений определяется расход газа через сопло путем сравнения стенки сопла с линией тока $\psi = q$, где q — значение функции тока на контуре сопла, рас-

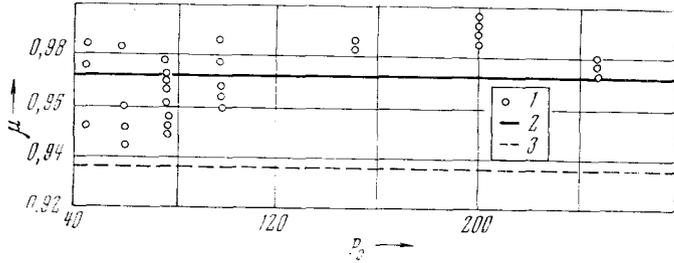


Рис. 2

считываемой вблизи критического сечения. Структура интегральных кривых в стационарной особой точке позволила автоматизировать процесс решения задачи на ЭЦВМ.

Расход газа вычислялся с помощью выражения

$$G = \pi r_2^2 \cdot 1/3 (-1/2 \rho_0 \lambda_0 + 8 \rho_1 \lambda_1 \cos^2 1/3 \theta + 5 \rho_2 \lambda_2 \cos^2 1/6 \theta);$$

вследствие недоопределенности краевой задачи только два параметра $\lambda_{1н}$ и $\theta_{1н}$ при $x = x_n$ задавались, а два параметра $\lambda_{0н}$ и $\lambda_{2н}$ определялись в ходе решения.

Были построены течения в соплах, образующие контура которых составлены из дуг окружности и отрезков прямых, для которых имеются экспериментальные данные по распределению давления на стенке сопла и коэффициентам расхода при $\kappa = C_p / C_v = 1,35$ (3).

На рис. 1а изображен контур сопла с $R_{кр} = 0,625r_{кр}$ и представлено (рис. 1б) распределение безразмерной скорости и давления на стенке сопла, для сравнения приведены результаты расчета давления по Зауэру (кривая 1), по Осватичу — Ротштейну (2) и экспериментальные данные (3). На рис. 2 представлены экспериментальные данные (1) по коэффициенту расхода $\mu = G / G_r$, где G — замеренное или рассчитанное значение расхода и G_r — расход, вычисленный по одномерной теории, результат

Таблица 1

$R_{кр}/r_{кр}$	Значения $\xi/r_{кр}$				
	(2)	Зауэр	Холл	(3)	наши данные
2,0	0,15—0,16	0,19	0,16	—	0,15
0,625	0,13—0,14	0,34	—	0,15	0,14

решения краевой задачи (2) и расчет по формуле Зауэра (3). Геометрия этого сопла характеризуется следующими величинами: угол наклона стенки подводящего канала $\theta_1 = 1^\circ 35'$, радиус скругления стенки на входе в сопло $R_2 = 0,32r_{вх}$, угол наклона конического участка $\theta_2 = 45^\circ$ и степень поджатия сопла $F_v / F_{кр} = 10$.

При движении газа в соплах на стенке входной части возникает зона с положительным градиентом давления, типичная картина распределения коэффициента давления $C_p = (P - P_\infty) / (\rho_\infty W_\infty^2 \cdot 2^{-1})$ в этом районе изображена на рис. 3, где представлен результат расчета для сопла с $R_{кр} = 0,625r_{кр}$. Максимальное торможение в этой области $C_{p_{max}}$ в основном

определяется отношением $R_2/r_{\text{вх}}$. На рис. 4 изображена зависимость $C_{P_{\text{max}}} = C_{P_{\text{max}}}(R_2/r_{\text{вх}})$, полученная в результате расчета при $C_{P_{\text{max}}} = 1,35$.

В табл. 1 приводится сравнение обхода звуковой точки на стенке сопла от критического сечения ξ , полученного экспериментально ⁽³⁾ и рассчитанного различными методами, в последнем столбце приведены результаты выполненных расчетов.

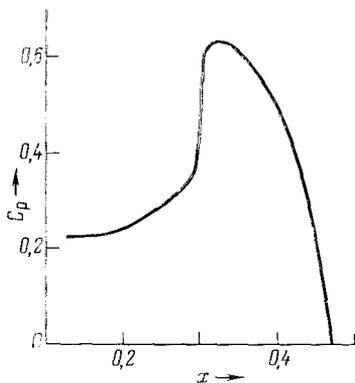


Рис. 3

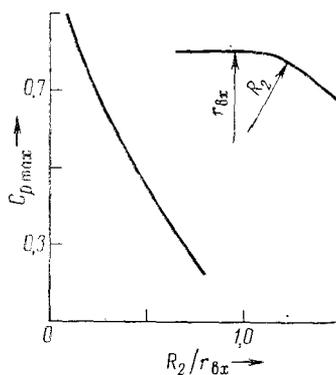


Рис. 4

Результаты решения краевой задачи, представленные на рис. 4 и 3, свидетельствуют о значительном влиянии до- и сверхзвуковой части контура стенки сопла на поле потока на входном участке сопла при малых дозвуковых скоростях течения газа.

Поступило
21 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Н. Дьяконов, Л. В. Пчелкина, ДАН, 191, № 2 (1970). ² О. М. Белоцерковский и др. Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 2, № 5, 731 (1962). ³ L. H. Back, AIAA J., 3, № 9, 1606 (1965). ⁴ I. Kliegel, I. Levine, AIAA J., 7, № 7, 1375 (1969).