Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 1

УДК 536.25 МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

А. М. СТОЛИН, С. И. ХУДЯЕВ

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 3 III 1972)

В предлагаемой работе показано, что учет диссипативного разогрева, зависимости вязкости от температуры и упругих свойств деформируемой среды (или динамометрических систем) может привести к возникновению колебательной неустойчивости для простых типов течения (сдвига и растяжения на стадии однородного деформирования).

1. Известен экспериментальный факт, что при больших скоростях деформирования полимерных систем возможно наступление неустойчивого режима течения. Наибольшее признание при объяснении этого явления получил механизм, связывающий неустойчивое течение с периодическим процессом «прилипание — скольжение» полимера по твердой стенке. Качественный анализ этого механизма был проведен в ([1]). В ряде работ сделаны попытки теоретически рассмотреть проблему устойчивости вязкоупругих сред с точки зрения других возможных механизмов. (Обзор этих исследований, а также и других работ, посвященных явлению неустойчивого течения полимеров, сделан в ([2]).)

При исследовании вопросов устойчивости течения не учитывалась диссипация энергии и зависимость вязкости от температуры. Так как наступление нерегулярного режима течения происходит в условиях повышенных скоростей деформирования, что обычно приводит к резкому повышению диссипативного разогрева, то учет неизотермичности процесса имеет существенное значение.

Рассмотрим куэттовское неизотермическое течение жидкости между двумя соосными цилиндрами, из которых внутренний, радиуса r_1, неподвижен, а внешний, радиуса r_2, вращается с угловой скоростью Ω. Так как в приборах динамометрическое устройство не является абсолютно жестким, то представляет определенный интерес учет упругого свойства динамометра, которое в дальнейшем будем характеризовать модулем G_1 ([3]). Будем предполагать, что скорость деформации R в точке приложения внешней силы постоянна. Лишь в случае абсолютной жесткости динамометра ($G_1 = \infty$) этому условию отвечает постоянная скорость вращения цилиндра ($\Omega = \text{const}$). В общем случае

$$R = \dot{\gamma}_{1y} + \dot{\gamma}_{2y} + \dot{\gamma}_{в}, \tag{1}$$

где $\dot{\gamma}_{1y}$, $\dot{\gamma}_{2y}$ — скорости упругой деформации динамометра и жидкости соответственно, $\dot{\gamma}_{в}$ — скорость вязкой (необратимой) деформации жидкости.

Предположим, что упругая деформация описывается законом Гука, а вязкая — законом Ньютона. Тогда

$$R = \frac{1}{G_1}\frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{G_2}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta} = \frac{1}{G_0}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}, \quad \frac{1}{G_0} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}. \tag{2}$$

Здесь τ — напряжение сдвига, G_2 — модуль упругости жидкости, η — вязкость жидкости.

Будем учитывать диссипативный разогрев и зависимость вязкости от температуры $\eta=\eta(T)$. При этом температуру T будем считать постоянной по объему жидкости, т. е. $T=T(t)$. Тогда из (2) следует, что $\tau=\tau(t)$ (при постоянном начальном условии), и для диссипативной функции q имеем выражение

$$q(T, \tau)=\tau\dot{\gamma}_в=\tau^2/\eta(T). \tag{3}$$

Уравнение теплового баланса запишем в виде

$$c\rho\frac{dT}{dt}=\frac{\tau^2}{\eta(T)}-\alpha\frac{s}{\omega}(T-T_0), \tag{4}$$

где c — теплоемкость, ρ — плотность, α — коэффициент теплоотдачи от жидкости к стенкам, $s/\omega=2/(r_2-r_1)$.

Система уравнений (2), (4) является замкнутой системой относительно функций T и τ. Отметим, что эта система не теряет смысла и при наличии распределения температуры по объему. В этом случае систему (2), (4) следует рассматривать как приближенную систему относительно средних значений T и τ, получающуюся тем или иным способом осреднения по объему, см. ([4], [5]).

Полагая $\eta(T)=\eta_0\exp[-\beta(T-T_0)]$, η_0, $\beta=\mathrm{const}$, и вводя безразмерные переменные и параметры по формулам

$$\begin{gathered}\theta=\beta(T-T_0),\quad \sigma=\frac{\alpha(s/\omega)}{c\rho G_0R}\tau,\quad x=\frac{\alpha(s/\omega)}{c\rho}t,\\ \delta=\frac{c\rho G_0}{\eta_0\alpha(s/\omega)},\quad \varkappa=\frac{\beta(c\rho RG_0)^2}{\eta_0(\alpha s/\omega)^3},\end{gathered} \tag{5}$$

уравнения (2) и (4) запишем в виде

$$d\sigma/dx=1-\delta\sigma e^{\theta},\quad d\theta/dx=\varkappa\sigma^2e^{\theta}-\theta. \tag{6}$$

Система (6) имеет одну точку равновесия (σ_0, θ_0), определяемую соотношениями

$$\theta_0e^{\theta_0}=\varkappa/\delta^2,\quad \sigma_0=\theta_0\delta/\varkappa. \tag{7}$$

Удобно анализировать систему (6), приняв в качестве параметров σ_0 и θ_0. Тогда

$$\delta=e^{-\theta_0}/\sigma_0,\quad \varkappa=\theta_0e^{-\theta_0}/\sigma_0^2. \tag{8}$$

Как известно ([6]), качественное поведение решений (структура положения равновесия) определяется инвариантами матрицы коэффициентов системы, линеаризованной в окрестности (σ_0, θ_0). Такими инвариантами являются детерминант Δ и след S матрицы:

$$\Delta=(\theta_0+1)/\sigma_0,\quad S=\theta_0-(1+\sigma_0)/\sigma_0. \tag{9}$$

Так как $\Delta>0$, то, исключая линию $S=0$, точка равновесия может быть либо «фокусом», либо «узлом». При $S>0$, или, что то же, при

$$\theta_0>(1+\sigma_0)/\sigma_0. \tag{10}$$

точка равновесия неустойчива.

Можно показать, что при любых значениях $\delta>0$, $\varkappa>0$ решение системы (6) попадает в некоторую ограниченную область и не покидает ее. Согласно известной теореме ([6]), § 28, это означает, что в случае неустойчивости точки равновесия (σ_0, θ_0) система (6) имеет усутойчивый предельный цикл, т. е. автоколебательное решение. Таким образом, неравенство (10) описывает область изменения параметров, при которых существует автоколебательное решение. Неравенства $S<0$, $S^2-4\Delta<0$, или

$$\sigma_0>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{\sigma_0}(3+\sigma_0-2\sqrt{2\sigma_0})<\theta_0<\frac{1}{\sigma_0}(1+\sigma_0) \tag{11}$$

описывают область затухающих колебаний. Часть квадранта $\sigma_0 > 0$, $\theta_0 > 0$ без замкнутых областей (10), (11) отвечает устойчивому «узлу». В этом случае решения системы (6) входят в особую точку (σ_0, θ_0) без колебаний. На рис. 1 цифрами *I*, *II*, *III* в исходных параметрах δ и $\varkappa$ отмечены соответственно область автоколебаний, область затухающих колебаний и область устойчивого «узла».

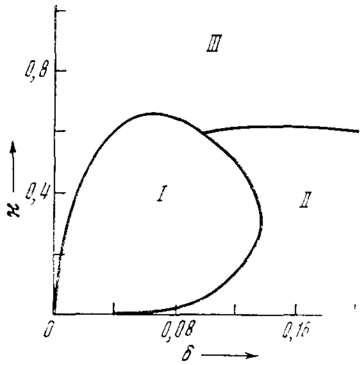

Рис. 1

Если зависимость вязкости от температуры задавать в общем виде $(1/\eta(T) = \varphi(\theta)/\eta_0$, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(\theta)$ возрастает), то, оказывается, область автоколебаний существует тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\max_{\theta>0} \frac{\theta\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} > 1. \qquad (12)$$

Можно показать также, что зависимость модуля упругости G_2 от температуры не влияет на качественное поведение решений.

В работе ([7]) выдвигается гипотеза, что тепловыделение при пластическом деформировании может явиться причиной периодических «щелчков» и колебаний напряжений в экспериментах на «наковальнях» Бриджмена, реализующих сдвиг при высоком давлении ([8]). Предсказанная теоретически в настоящем исследовании возможность автоколебаний при сдвиге согласуется с указанной гипотезой. Интересно отметить, что этот же тепловой механизм привлекается в ([7]) для объяснения глубокофокусных землетрясений.

2. Тепловые факторы могут оказывать влияние и на процесс растяжения. Именно тепловыделением в ходе ориентационного превращения и упругим деформированием обусловлено автоколебательное распространение шейки по образцу. Интерес к этому явлению, экспериментально обнаруженному в ([9]) и описанному теоретически в ([10]), вызван еще и аналогией явлений распространения шейки и пламени ([11]).

Ниже покажем, что колебательная неизотермическая неустойчивость возникает и на стадии однородного деформирования, предшествующей стадии образования шейки.

Пусть имеется цилиндрический образец радиуса r_0 и длиной l_0, верхний конец которого $z = 0$ защемлен, а нижний — $z = l(t)$ — с момента времени $t = 0$ растягивается с заданной скоростью $V(t)$ в направлении оси z. Рассмотрим однородное деформирование образца, т. е. принимаем, что v_z не зависит от r, а v_r не зависит от z.

Аналогично (1), (2) принимаем

$$\frac{1}{G_1}\frac{d\bar{\tau}}{dt} + \frac{1}{G_2}\frac{d\bar{\tau}}{dt} + \frac{\bar{\tau}}{\eta(T)} = \bar{\Delta}, \qquad (13)$$

где $\bar{\tau}$ — тензор напряжений, $\bar{\Delta}$ — тензор скоростей деформации.

Из уравнения неразрывности следует

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = R(t), \qquad (14)$$

откуда с учетом граничных условий

$$v_z = \frac{V}{l}z, \quad v_r = -\frac{V}{2l}r, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{V}{l}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{V}{2l} \quad \left[R(t) = \frac{V(t)}{l(t)}\right]. \qquad (15)$$

Ненулевые (диагональные) компоненты тензора $\bar{\Delta}$ имеют вид

$$\Delta_{rr} = 2\partial v_r/\partial r = -R, \quad \Delta_{\varphi\varphi} = 2v_r/r = -R, \quad \Delta_{zz} = 2\partial v_z/\partial z = 2R. \qquad (16)$$

При подходящих начальных условиях (например, нулевых) из (13), (16) следует

$$\tau_{zz} = -2\tau_{rr} = -2\tau_{\varphi\varphi} \equiv \tau. \qquad (17)$$

Будем предполагать, что температура постоянна по объему образца. Тогда из (13) и (16) следует, что и тензор $\bar{\tau}$ постоянен по объему образца.

Уравнения для T и τ принимают вид

$$\frac{1}{G_0}\frac{d\tau}{dt} = 2R - \frac{\tau}{\eta(T)}, \quad c\rho\frac{dT}{dt} = \frac{3}{2}\frac{\tau^2}{\eta(T)} - \alpha\frac{s}{\omega}(T - T_0),$$
$$\frac{s}{\omega}(t) = 2\sqrt{\frac{\pi l(t)}{\omega}}, \quad \omega = \mathrm{const}. \qquad (18)$$

В общем случае система уравнений неавтономна и ее исследование сопряжено с неудобствами. Если, однако, исходить из предположения о малых деформациях образца по сравнению с l_0 за характеристическое время теплоотвода $t_1 = c\rho / (\alpha(s/\omega))$ и рассматривать процесс растяжения в течение времени, соизмеримого с t_1, то система близка к автономной ($l \approx l_0$, $R \approx R_0 = V_0 / l_0$), которая при $\eta(T) = \eta_0 \exp[-\beta(T - T_0)]$ относительно величин вида (5) (по сравнению с (5) σ получает множитель $^1/_2$, а $\varkappa$ — множитель 6; остальные величины те же) совпадает с системой (6). Тем самым все результаты, полученные для сдвигового течения, имеют место и в рассматриваемом случае растяжения.

Условие автономности системы можно выразить неравенством

$$t_1 \ll t_0 = 1 / R_0 = l_0 / V_0, \qquad (19)$$

и t_0 можно назвать характерным временем удлинения образца.

Если рассматривать процесс растяжения в течение времени, соизмеримого с t_0, то будет сказываться неавтономность системы и при выполнении условия автоколебаний (10) будут наблюдаться быстрые колебания на фоне медленного (квазистационарного) изменения положения равновесия (σ_0, θ_0).

Кроме t_1 и t_0 можно ввести еще два характеристических времени: тепловыделения $t_2 = c\rho / (\eta_0\beta R^2)$ и упругой релаксации $t_3 = \eta_0 / G_0$. Так как область автоколебаний содержится в прямоугольнике (см. рис. 1)

$$0 < \delta < 1/e^2 = 0{,}135, \quad 0 < \varkappa < 0{,}667 \qquad (20)$$

и $\delta = t_1 / t_3$, $\varkappa = \dfrac{t_1}{t_2}\dfrac{t_1^2}{t_3^2}$, то неравенство (20) можно рассматривать как ограничение на характеристические времена в режиме автоколебаний:

$$t_1 < 0{,}135\, t_3, \quad t_1 < 36{,}4\, t_2. \qquad (21)$$

Приближенные оценки показывают, что для реальных полимерных сред и режимов деформирования можно подобрать значения размерных параметров, удовлетворяющие указанным неравенствам.

Авторы выражают глубокую признательность А. Г. Мержанову и А. И. Леонову за обсуждение работы и ценные советы.

Институт химической физики
Академии наук СССР
Черноголовка Моск. обл.

Поступило
28 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Буевич, А. И. Леонов, Журн. прикл. мех. и техн. физ., 2 (1966). [2] А. Я. Малкин, А. И. Леонов, В сборн. Успехи реологии полимеров, М., 1970. [3] И. М. Белкин, Г. В. Виноградов, А. И. Леонов, Ротационные приборы, М., 1968. [4] В. В. Барзыкин, В. Т. Гонтковская и др., Журн. прикл. мех. и техн. физ., 3 (1964). [5] С. И. Худяев, ДАН, 154, № 4 (1964). [6] Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1970. [7] D. T. Griggs, D. W. Baker, The Origin of Deep-focus Earthquakes, Properties of Matter under Unusual Conditions, N. Y., 1969. [8] П. В. Бриджмен, Исследование больших пластических деформаций и разрыва, М., 1970. [9] А. С. Кечекьян, Г. П. Андрианова, В. А. Каргин, Высокомолек. соед., A12, 11 (1970). [10] Г. И. Баренблатт, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 5 (1970). [11] Г. И. Баренблатт, ПММ, 28, 6 (1964).