Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 1

УДК 539.3.374 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Н. СУПРУН

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ И ОПИСАНИЯ ЭФФЕКТА ДЕФОРМАЦИОННОЙ ДЕСТАБИЛЬНОСТИ В РЕОНОМНЫХ СРЕДАХ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 14 III 1972)

1°. Пусть $\varepsilon_{ij}^a(t)$, $\varepsilon_{ij}^{a+c}(t)$, $\varepsilon_{ij}^b(t)$, $\varepsilon_{ij}^{b+c}(t)$ — деформации четырех одинаковых образцов (детерминированных систем) реономной среды (р.с.) от квазистатических напряжений соответственно $\sigma_{kl}^a(t)$, $\sigma_{kl}^a(t)+\sigma_{kl}^c(t)$, $\sigma_{kl}^b(t)$, $\sigma_{kl}^b(t)+\sigma_{kl}^c(t)$. Условимся считать количественной характеристикой деформационной дестабильности (д.д.) тензор $\|\varepsilon_{ij}^*(t)\|$, где $i, j, k, l = 1, 2, 3$,

$$\overset{*}{\varepsilon}_{ij}(t) = \overset{''}{\varepsilon}_{ij}(t) - \overset{'}{\varepsilon}_{ij}(t); \tag{1}$$

здесь $\varepsilon_{ij}'(t) = \varepsilon_{ij}^{a+c}(t) - \varepsilon_{ij}^a(t)$, $\varepsilon_{ij}''(t) = \varepsilon_{ij}^{b+c}(t) - \varepsilon_{ij}^b(t)$ — приращения деформаций от догрузки $\sigma_{ij}^c(t)$ при неодинаковых первичных воздействиях.

Определение. Р.с. называется деформационно дестабильной при данной программе испытаний на множестве моментов времени T, если для всех $t\in T$ будет $\|\varepsilon_{ij}^*(t)\|\neq 0$.

Будем различать качественно и количественно два независимых вида д.д., выявляемые из результатов испытаний на ползучесть.

1) Мгновенное упрочнение (м.у.). Положим

$$\sigma_{kl}^a(t) = 0,\quad \sigma_{kl}^b(t) = \sigma_{kl}^d 1_-(t-t_1),\quad \sigma_{kl}^c(t) = \sigma_{kl}^e 1_-(t-t_1),$$

где σ_{kl}^d, σ_{kl}^e — постоянные напряжения, реализованные за пренебрежимо малый промежуток времени; $1_-(t-t_1)$ — асимметричная единичная функция $[1_-(t-t_1)=1$ при $t\geqslant t_1$, $1_-(t-t_1)=0$ при $t<t_1]$. Тогда из выражения (1) получим характеристику м.у. $\|\varepsilon_{ij}^\Lambda(t,t)\|$,

$$\varepsilon_{ij}^\Lambda(t_1,t) = \varepsilon_{ij}^{d+e}(t_1,t) - \varepsilon_{ij}^d(t_1,t) - \varepsilon_{ij}^e(t_1,t), \tag{2}$$

определяющую аддитивность ($\varepsilon_{ij}^\Lambda(t_1,t)=0$ — признак линейности) и неаддитивность ($\varepsilon_{ij}^\Lambda(t_1,t)\neq 0$ — признак нелинейности) деформаций ползучести.

2) Деформационное старение (д.с.). Положим

$$\sigma_{kl}^a(t) = \sigma_{kl}^d 1_-(t-t_1),\quad \sigma_{kl}^b(t) = \sigma_{kl}^d 1_-(t-t_0),\quad \sigma_{kl}^c(t) = \sigma_{kl}^e 1_-(t-t_1),\quad t_0<t_1.$$

Тогда из выражения (1) получим характеристику д.с. $\|\varepsilon_{ij}^s(t_0,t_1,t)$

$$\varepsilon_{ij}^s(t_0,t_1,t) = \varepsilon_{ij}^{d+e}(t_0,t_1,t) - \varepsilon_{ij}^d(t_0,t) - \varepsilon_{ij}^{d+e}(t_1,t) + \varepsilon_{ij}^d(t_1,t), \tag{3}$$

представляющую разность приращений деформаций от воздействия равных ступенчатых догрузок, вызванную различием во времени предварительной выдержки образцов под одинаковой первичной ступенчатой нагрузкой. С помощью введенных величин запишем характеристику упрочнения при ступенчатой нагрузке $\|\varepsilon_{ij}^{ss}(t_0,t_1,t)\|$, зависящую от эффектов м.у. и д.с.,

$$\varepsilon_{ij}^{ss}(t_0,t_1,t) = \varepsilon_{ij}^{d+e}(t_0,t_1,t) - \varepsilon_{ij}^d(t_0,t) - \varepsilon_{ij}^e(t_1,t). \tag{4}$$

Теорема. *Если при заданных* $\|\sigma_{kl}^d\|$, $\|\sigma_{kl}^e\|, t_1$ *для множества* T_0 *моментов времени* t_0 *будет* $\|\varepsilon_{ij}^s(t_0, t_1, t)\| = 0$, *то для всех* $t_0 \in T_0$

$$\| \varepsilon_{ij}^{ss}(t_0, t_1, t) \| = \| \varepsilon_{ij}^{\Lambda}(t_1, t) \|. \tag{5}$$

Доказательство. Преобразуем при $\varepsilon_{ij}^s(t_0, t_1, t) = 0$ выражение (3):

$$\varepsilon_{ij}^{d+e}(t_0, t_1, t) - \varepsilon_{ij}^d(t_0, t) - \varepsilon_{ij}^e(t_1, t) = \varepsilon_{ij}^{d+e}(t_1, t) - \varepsilon_{ij}^d(t_1, t) - \varepsilon_{ij}^e(t_1, t);$$

тогда, учитывая (2), (4), получим равенство (5). Таким образом, при отсутствии д.с. характеристика м.у. не зависит от времени предварительной выдержки образца под первичной нагрузкой.

Справедлива и обратная теорема.

2°. Рассматривая одномерный процесс ($\sigma_{kl}^d = \sigma_{d,\dots}$), исследуем возможности описания д.с. с помощью получивших распространение (в основном для неметаллических материалов) моделей [1-4]

$$\varepsilon(t) = \int_{-0}^{t} \left\{ \frac{1}{E(\tau)} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} + K(t, \tau) \frac{dF[\sigma(\tau)]}{d\tau} \right\} d\tau, \tag{6}$$

$$\varepsilon(t) = \psi \left[\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\, d\sigma(\tau) \right], \tag{7}$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} K(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{k=1}^{n} d\sigma(\tau_k). \tag{8}$$

1) Описание м.у. Реакция среды, описываемая моделями (6) — (8), зависит только от величины окончательного мгновенного напряжения $\sigma_d + \sigma_l$, т. е. не отражает истории загружения. Это оправдано при догрузке ($\sigma_d \gtrless 0$, $\sigma_e \gtrless 0$), но не при разгрузке ($\sigma_d \gtrless 0$, $\sigma_e \lessgtr 0$), когда первичное нагружение σ_d может привести к необратимым изменениям свойств р.с.

2) Описание д.с. Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение (6), являющееся моделью технологически стареющей среды, не описывает д.с. [$\varepsilon^s(t_0, t_1, t) = 0$]. Запишем характеристику д.с. для уравнения (7), при $\psi[x] = x^m$, $\psi[-x] = -x^m$, $x > 0$:

$$\varepsilon^s(t_0, t_1, t) = [K(t - t_1)\sigma_d] [\varphi(\sigma_e/\sigma_d) - \varphi(0)],$$

$$\varphi(y) = \left[\frac{K(t - t_0)}{K(t - t_1)} + y \right]^m - (1 + y)^m.$$

При $t_0 < t_1$ и $t_1 < t < \infty$ будет $\dfrac{K(t - t_0)}{K(t - t_1)} > 1$, поэтому $\varphi(y)$ с возрастанием $y \geqslant -1$ монотонно убывает при $0 < m < 1$ и монотонно возрастает при $m > 1$. Следовательно, при $\sigma_d \gtrless 0$, $\sigma_e \gtrless 0$ имеет место упрочнение [$\varepsilon^s(t_0, t_1, t) \lessgtr 0$] при $0 < m < 1$ и разупрочнение при $m > 1$ (последнее наблюдалось [5] в экспериментах). Для случая $\sigma_d \gtrless 0$, $\sigma_e \lessgtr 0$ и $|\sigma_d| \geqslant |\sigma_e|$ будет $\varepsilon^s(t_0, t_1, t) \gtrless 0$ при $0 < m < 1$, $\varepsilon^s(t_0, t_1, t) \lessgtr 0$ при $m > 1$. Для модели (8) показатель д.с. запишем в виде

$$\varepsilon^s(t_0, t_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_d^{n-j} \sigma_e^j \left[\sum_{i_1 + \dots + i_n = j} K_n(t, t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) - \binom{n}{j} K_n(t, t_1, \dots, t_1) \right], \tag{9}$$

где $K_n(\cdot)$ — ядро ползучести n-го порядка — непрерывная функция своих аргументов; $i_1, \dots, i_n$ — натуральные числа, причем $0 \leqslant i_1, \dots, i_n \leqslant 1$.

Если для инвариантных во времени сред функции $K_n(\cdot)$ имеют при $t \to \infty$ конечный предел, то для любых $t_0, t_1 < \infty$.

$$\lim_{t \to \infty} K_n(t - t_{i_1}, \dots, t - t_{i_n}) = \lim_{t \to \infty} K_n(t - t_1, \dots, t - t_1). \tag{10}$$

Уравнение (7), так же как и (6), может иметь $\varepsilon^s(t_0, t_1, t) \neq 0$ при $t < \infty$; для разностных ядер $\varepsilon^s(t_0, t_1, \infty) = 0$ (9, 10). Поэтому при описании технологически не стареющей среды уравнениями (7, 8) д.с. может иметь только локальный во времени характер, хотя более достоверным явилось бы отражение влияния д.с. на деформацию $\varepsilon(\infty)$. Предложены способы модификации наследственных моделей для согласования с экспериментальными данными при обратной ползучести. Так, при использовании уравнения (7) предлагается для разгрузки ($d\varepsilon < 0$) принять за график ψ прямую ([6]) или кривую ([7]) мгновенной разгрузки. При этом закон разгрузки носит инвариантный во времени характер и зависит только от величины максимальной деформации, достигнутой в процессе нагружения; реологические характеристики (функции влияния) при нагрузке и разгрузке одинаковы. Предпринята попытка ([8]) модифицировать и уравнение (6).

3°. Пусть p — некоторый параметр процесса; при $dp > 0$ процесс активный, при $dp < 0$ — пассивный. При $dp = d\sigma(t)$ будем иметь признак активности по напряжениям Π_σ, при $dp = d\varepsilon(t)$ — по общим деформациям (мгновенным и запаздывающим) Π_ε. Будем считать на плоскости σt при $t \geqslant t'$ напряжение $\sigma^*(t', t)$ границей активности процесса, если оно при $t > t'$ обеспечивает нейтральность ($p = 0$) процесса; очевидно, что $\sigma^*(t', t)$ зависит от истории нагружения при $t < t'$. Аналогично на плоскости εt введем $\varepsilon^*(t', t)$. Будем считать: $\sigma_{d\sigma}{}^*(t', t)$ — граница активности процесса при Π_σ, $\sigma_{d\varepsilon}{}^*(t', t)$ — то же при Π_ε. Положим, что в момент времени $t = t_1$ к образцу приложено напряжение $\sigma_0 1_-(t - t_1) \geqslant 0$, тогда при $t' = t_1$ $\sigma_{d\sigma}{}^*(t_1, t) = \sigma_0$ и $\sigma_{d\varepsilon}{}^*(t_1, t) = \sigma_{(0)}(t_1, t)$, где $\sigma_{(0)}(t_1, t)$ — функция релаксации, причем $\sigma_{(0)}(t_1, t_1) = \sigma_0$. Если моменту $t' > t_1$ предшествовала релаксация $\sigma_{(0)}(t_1, t')$, то разность границ активности признаков ($\Pi_\sigma - \Pi_\varepsilon$) на плоскости σt и аналогично на плоскости εt при предшествующей ползучести $\varepsilon_{(0)}(t_1, t')$ составит

$$\Delta\sigma^*(t', t) = \sigma_{(0)}(t_1, t') - \sigma_{(0)}(t_1, t) \geqslant 0,$$

$$\Delta\varepsilon^*(t', t) = \varepsilon_{(0)}(t_1, t) - \varepsilon_{(0)}(t_1, t') \geqslant 0. \qquad (11)$$

Следовательно, если в окрестности $t' + 0$ кривая нагружения будет выходить из сектора (11), то при $t = t' + 0$ признаки Π_σ и Π_ε будут совпадать; по мере удаления момента начала разгрузки t' от момента первичного возмущения t_1 угол раствора сектора (11) будет уменьшаться, если будет существовать конечный предел для $\sigma_{(0)}(t_1, t)$ и $\varepsilon_{(0)}(t_1, t)$ при $t \to \infty$. При ступенчатой разгрузке признаки Π_σ и Π_ε будут совпадать всегда в точках приложения напряжения разгрузки t_1 (за счет мгновенных деформаций), а при достаточно больших разгружающих напряжений и при $t > t_1$. Следовательно, существует обширный класс процессов разгрузки, для которых признаки Π_σ и Π_ε будут совпадать или различаться незначительно. Физически при непрерывной разгрузке граница между Π_σ и Π_ε будет зависеть от соотношения мгновенных (ε_y) и запаздывающих (ε_p) деформаций. Так, в период $d\sigma < 0$ и $d\varepsilon > 0$ будет $d\varepsilon_y < 0$, $d\varepsilon_p > 0$ (в кристаллических телах произойдет снижение скорости движения дислокаций), но $d\varepsilon_p > -d\varepsilon_y$. При $d\varepsilon < 0$ в окрестности границы активности будет также $d\varepsilon_y < 0$, $d\varepsilon_p > 0$, но $d\varepsilon_p < -d\varepsilon_y$.

Положим, что начально изотропная, нестареющая среда при испытаниях на чистый сдвиг в некотором интервале изменения напряжений и промежутке времени T_1 обладает следующими свойствами: а) $\varepsilon_{12}{}^s(t_0, t_1, t) = 0$ при $dp \gtrless 0$ (отсутствует д.с.); б) $\varepsilon_{12}{}^\Lambda(t_1, t) = 0$ при $dp > 0$ (отсутствует м.у., для определенности положим $\sigma_{12}{}^d$, $\sigma_{12}{}' > 0$; б) $\varepsilon_{12}{}^\Lambda(t_1, t) = \varepsilon_{12}{}^{\Lambda(0)}(t_1, t)\sigma_{12}{}^e$ при $dp < 0$ (характеристика м.у. пропорциональна напряжению разгрузки, $\varepsilon_{12}{}^{\Lambda(0)}(t_1, t)$ — удельная характеристика м.у., определяемая из эксперимента).

Тогда, согласно доказанной теореме, характеристика упрочнения при ступенчатой нагрузке будет постоянна для всех $t \in T_1$. Указанными свойствами обладает среда, описываемая линейной наследственной моделью, изменяющей свои параметры при смене активности процесса. Так, при сложном напряженном состоянии в случае простого нагружения соотношения между компонентами девиаторов напряжений (s_{ij}) и деформаций (e_{ij}) установим в виде

$$e_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} K_{\pm}(t-\tau)\, ds_{ij}(\tau), \tag{12}$$

$$s_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} L_{\pm}(t-\tau)\, de_{ij}(\tau), \tag{13}$$

где ядра K_{+}, L_{+} принимаются при $dp > 0$, а K_{-}, L_{-} при $dp < 0$.

Для описания ползучести полиуретана ([9]) при трехступенчатой разгрузке использовалось нелинейное уравнение (8). Относительная интегральная погрешность по абсолютной величине по участкам разгрузки для трех типов ядер составила: 20,83% (TIP), 21,00% (SUP), 30,76% (PROD). Та же погрешность от аппроксимации уравнением (12) с ядром $Э_{\alpha}(-\beta,\, t-\tau)$ ([10]) составила 3,71% при $\alpha_{+} = -0{,}735$, $\beta_{+} = 0{,}2$, $\varkappa_{+} = 0{,}32253_{\text{psi}}$, $E_{+} = 31601_{\text{psi}}$, $\alpha_{-} = -0{,}67$, $\beta_{-} = 0{,}065$, $\varkappa_{-} = 0{,}210039_{\text{psi}}$, $E_{-} = 31096_{\text{psi}}$.

Уравнения (12), (13) отражают деформационную анизотропию, учитывают остаточные деформации и сохраняют преимущество линейных моделей, состоящее в возможности использования методов интегральных преобразований. При этом остаточные деформации $e_{ij}(\infty)$ при ступенчатой нагрузке — разгрузке пропорциональны достигнутой величине s_{ij}:

$$e_{ij}(\infty) = \max s_{ij} \lim_{t\to\infty} [K_{+}(t-t_1) - K_{-}(t-t_2)].$$

В случае проявления нелинейной ползучести при нагрузке и разгрузке могут быть использованы нелинейные операторы (6), (7), (8) с ядрами, изменяющимися при смене активности процесса. Критериями необходимости учета деформационной анизотропии р.с. могут служить локальные соотношения функций ползучести и релаксации ([11]) для линейных и нелинейных сред.

Горьковский инженерно-строительный институт
им. В. П. Чкалова

Поступило
13 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, М., 1952. [2] Ю. Н. Работнов, Ползучесть элементов конструкций, М., 1966. [3] M. Fréchet, Ann. Ecole Normale Super, 27, 3 (1910). [4] V. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes, Paris, 1913. [5] В. С. Наместников, Ю. Н. Работнов, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 4, 148 (1961). [6] Ю. Н. Работнов, Вестн. Московск. унив., № 10, 81 (1948). [7] Ю. Н. Работнов, Л. Х. Паперник, Е. И. Степанычев, Механика полимеров, № 1, 74 (1971). [8] Г. Д. Вишневецкий, Н. С. Кокоулина, Тр. Ленингр. инж.-строит. инст., № 68, 148 (1971). [9] R. O. Stafford, Mech. Phys. Solids, 17, 339 (1969). [10] Ю. Н. Работнов, Л. Х. Паперник, Е. Н. Звонов, Таблицы дробно-экспоненциальной функции и интеграла от нее, М., 1969. [11] А. Н. Супрун, ДАН, 199, № 6, 1265 (1971).