Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 1

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

И. С. ФРОЛОВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА НА ВСЕЙ ОСИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 III 1972)

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$B\frac{d}{dx}f(x)+mTf(x)+V(x)f(x)=\lambda f(x) \tag{1}$$

при $-\infty<x<\infty$, $m\geqslant 0$, где

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad V(x)=\begin{pmatrix}p(x)&q(x)\\q(x)&-p(x)\end{pmatrix}.$$

Элементы потенциальной матрицы $V(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|p(x)|\leqslant\frac{c}{1+|x|^{2+2\varepsilon}},\quad |q(x)|\leqslant\frac{c}{1+|x|^{1+\varepsilon}},\ |p'(x)|+|q'(x)|\leqslant\frac{c}{1+|x|^{1+\varepsilon}},\quad \varepsilon>0. \tag{2}$$

Обратная задача рассеяния для уравнения (1) на полупрямой рассматривалась Б. М. Левитаном и М. Г. Гасымовым ([1]). Обобщение на случай $2n$-компонентных векторов было получено М. Г. Гасымовым ([2]). Обратная задача рассеяния для уравнения Штурма — Лиувилля на всей прямой рассматривалась Л. Д. Фаддеевым ([3], [4]). Постановка нашей задачи аналогична постановке последнего автора.

1. Задача рассеяния. а) Оператор преобразования. В случае выполнения неравенств (2) имеют место следующие представления для $f(x)$ через решения простейшего уравнения (1) без потенциала:

$$f_1(x,\lambda)=e_1(x,\lambda)+\int_x^\infty K(x,t)e_1(t,\lambda)\,dt, \tag{3}$$

$$f_2(x,\lambda)=e_2(x,\lambda)+\int_{-\infty}^x \widetilde{K}(x,t)e_2(t,\lambda)\,dt. \tag{4}$$

Здесь

$$e_1(x,\lambda)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-k_1\\i\end{pmatrix}e^{ikx} & \text{при}\quad \lambda>0,\\ \begin{pmatrix}k_1\\i\end{pmatrix}e^{ikx} & \text{при}\quad \lambda<0;\end{cases}\qquad e_2(x,\lambda)=\begin{cases}\begin{pmatrix}k_1\\i\end{pmatrix}e^{-ikx} & \text{при}\ \lambda>0,\\ \begin{pmatrix}-k_1\\i\end{pmatrix}e^{-ikx} & \text{при}\ \lambda<0;\end{cases}$$

$$k_1=\sqrt{(\lambda+m)/(\lambda-m)},$$
$$k=\sqrt{\lambda^2-m^2}. \tag{5}$$

Элементы матрицы-функции $K_{ij}(x,y)$, $i,j=1,2$, удовлетворяют в области $-\infty<\gamma\leqslant x\leqslant y$ оценкам

$$|K_{11,22}(x,y)| \leqslant \frac{c(\gamma)}{1+|x+y|^{1+\varepsilon}}, \quad |K_{12,21}(x,y)| \leqslant \frac{c(\gamma)}{(1+|x+y|^{1+\varepsilon})(1+|x|^{1+\varepsilon})}, \tag{6}$$

$$|K'_{ij_x}(x,y)| + |K'_{ij_y}(x,y)| \leqslant \min\left(\frac{c(\gamma)}{1+|y|^{1+\varepsilon}}, \frac{c(\gamma)}{1+|x|^{1+\varepsilon}}\right). \tag{7}$$

Оценки (6) аналогичны полученным в работе М. Г. Гасымова ([2]). Такие же оценки в области $y \leqslant x \leqslant \gamma < \infty$ имеют место и для $\tilde{K}(x, y)$.

Нам будет удобно считать k основной переменной и писать в дальнейшем $f(x;\ k, \lambda)$ или $f(x;\ k)$ вместо $f(x, \lambda)$, и т. п.

Как следует из соотношения (5), при замкнутом обходе k вокруг im решение $f(x;\ k, \lambda)$ переходит в $f(x;\ k, -\lambda)$. Из (3), (4) и оценок (6) следует регулярность компонент $f(x;\ k, \lambda)$ в верхней полуплоскости переменной k.

б) Матрица $s_{ij}(k, \lambda)$. Ввиду того, что при $\operatorname{Im} k = 0$, $k \neq 0$ выполняется равенство $f(x;\ -k, \lambda) = -\overline{f(x;\ k, \lambda)}$, можно записать следующие соотношения:

$$s_{11}(k,\lambda) f_2(x;\ k, \lambda) = f_1(x;\ -k, \lambda) + s_{21}(k,\lambda) f_1(x;\ k, \lambda), \tag{8}$$

$$s_{22}(k,\lambda) f_1(x;\ k, \lambda) = f_2(x;\ -k, \lambda) + s_{12}(k,\lambda) f_2(x;\ k, \lambda). \tag{9}$$

Для $s_{ij}(k, \lambda)$, применяя обозначения $[\cdot, \cdot]$ для вронскиана, имеем

$$\begin{gathered} s_{11,22}(k,\lambda) = \frac{2ik_1}{[f_2(x;\ k,\lambda),\ f_1(x;\ k,\lambda)]}, \\ s_{12}(k,\lambda) = \frac{[f_1(x;\ k,\lambda),\ f_2(x;\ -k,\lambda)]}{[f_2(x;\ k,\lambda),\ f_1(x;\ k,\lambda)]}, \\ s_{21}(k,\lambda) = \frac{[f_1(x;\ -k,\lambda),\ f_2(x;\ k,\lambda)]}{[f_2(x;\ k,\lambda),\ f_1(x;\ k,\lambda)]}. \end{gathered} \tag{10}$$

Перечислим следующие свойства $s_{ij}(k, \lambda)$, вытекающие из (3), (4), (6), (7), аналогичные полученным в работе ([3]): $s_{ij}(k, \lambda)$ непрерывны при $\operatorname{Im} k = 0$, $k \neq 0$; в случае линейной независимости $f_1(x;\ 0)$ и $f_2(x;\ 0)$, а также $f_1(x;\ im)$ и $f_2(x;\ im)$, что мы будем в дальнейшем предполагать, непрерывность сохраняется и при $k = 0$ и соответствующем λ, если положить $s_{11}(0) = 0$, $s_{12}(0) = s_{21}(0) = -1$; $s_{11}(k)$ является при $\operatorname{Im} k = 0$ предельным значением функции, мероморфной в верхних полуплоскостях римановой поверхности с точкой ветвления второго порядка im и имеет конечное число простых полюсов $i\chi_n$, $0 < \chi_n < m$, с вычетами

$$\operatorname{Res} s_{11}(i\chi_n) =$$
$$= \frac{i\sqrt{m^2-\chi_n^2}}{\sqrt{m^2-\chi_n^2}-m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} (f_{11}(x, i\chi_n) f_{21}(x, i\chi_n) + f_{12}(x, i\chi_n) f_{22}(x, i\chi_n))\,dx\right)^{-1}.$$

При $\operatorname{Im} k = 0$ выполняются соотношения

$$s_{ij}(-k) = \overline{s_{ij}(k)}, \quad s_{11}(k) s_{21}(-k) + s_{12}(k) s_{11}(-k) = 0,$$
$$|s_{11}(k)|^2 + |s_{12}(k)|^2 = |s_{11}(k)|^2 + |s_{21}(k)|^2 = 1;$$

при больших $|k|$ имеют место следующие асимптотики:

$$s_{12}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad s_{21}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad s_{11}(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Опираясь на приведенные свойства, можно восстановить $s_{ij}(k, \lambda)$ по $s_{21}(k, \lambda)$ или $s_{12}(k, \lambda)$ и полюсам $s_{11}(k, \lambda)$.

в) Основное уравнение. Используя соотношение (9), оператор преобразования и формулы обращения для обобщенного преобразования Фурье по собственным функциям оператора $B\,d/dx + mT$, получаем основное уравнение

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_x^\infty K(x, t) F(t+y)\, dt = 0, \qquad (11)$$

справедливое при $x \leqslant y$, в котором

$$F(x) = F_s(x) + \sum_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} (f_{11}^2(x, i\chi_n) + f_{12}^2(x, i\chi_n))\, dx \right)^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - \chi_n^2}}{m \mp \sqrt{m^2 - \chi_n^2}} & -\sqrt{\dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - \chi_n^2}}{m \mp \sqrt{m^2 - \chi_n^2}}} \\ -\sqrt{\dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - \chi_n^2}}{m \mp \sqrt{m^2 - \chi_n^2}}} & 1 \end{pmatrix} \exp(-\chi_n x). \qquad (12)$$

Суммирование здесь распространяется на все полюсы $s_{11}(k)$, верхние знаки берутся при $\lambda > 0$, нижние — при $\lambda < 0$. $F_s(x)$ есть обратное обобщенное преобразование Фурье от матрицы

$$\widetilde{S}(k, \lambda) = \begin{cases} -\begin{pmatrix} -k_1 & k_1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{21}(k, \lambda) & 0 \\ 0 & s_{21}(-k, \lambda) \end{pmatrix}, & \lambda > 0, \\ -\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{21}(k, \lambda) & 0 \\ 0 & s_{21}(-k, \lambda) \end{pmatrix}, & \lambda < 0, \end{cases}$$

получающееся по формуле

$$F_s(x) = \int_{-\infty}^{0} \widetilde{S}(k, \lambda) \begin{pmatrix} k_1 e^{ikx} & ie^{ikx} \\ -k_1 e^{-ikx} & ie^{-ikx} \end{pmatrix} d\rho(\lambda) +$$

$$+ \int_0^\infty \widetilde{S}(k, \lambda) \begin{pmatrix} -k_1 e^{ikx} & ie^{ikx} \\ k_1 e^{-ikx} & ie^{-ikx} \end{pmatrix} d\rho(\lambda),$$

где

$$k = +\sqrt{\lambda^2 - m^2}, \quad d\rho(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} k_1\, d\lambda, & |\lambda| > m, \\ 0, & |\lambda| \leqslant m. \end{cases}$$

Элементы матрицы $F_s(x)$ при этом оказываются вещественными функциями.

Естественно назвать $s_{21}(k, \lambda)$, m, $i\chi_n$, $\alpha_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|f_1(x, i\chi_n)\|^2 dx$ данными рассеяния задачи (1).

Используя оценки (6), (7), из уравнения (11) можно получить следующие оценки для функций $F_{ij}(x)$ при $-\infty < \delta \leqslant x < \infty$:

$$|F_{11,22}(x)| \leqslant \frac{c_1(\delta)}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}, \quad |F_{12,21}(x)| \leqslant \frac{c_1(\delta)}{1 + |x|^{2+2\varepsilon}}, \qquad (13)$$

$$|F'_{ij}(x)| \leqslant \frac{c_1(\delta)}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}. \qquad (14)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *При произвольном* $\delta > -\infty$ *уравнение*

$$\varphi(s) + \int_\delta^\infty \varphi(t) F(t+s)\, dt = 0$$

имеет только нулевое решение в $L_{1,2}^{(2)}(\delta, \infty)$.

Уравнение, аналогичное (11), имеет место и для $\tilde{K}(x, y)$:

$$\tilde{K}(x, y) + \tilde{F}(x + y) + \int_{-\infty}^{x} \tilde{K}(x, t)\tilde{F}(t + y)\,dt = 0, \quad y \leqslant x. \tag{15}$$

Его ядро $\tilde{F}(x)$ строится по $s_{12}(k)$ аналогично $F(x)$. При $-\infty < x \leqslant \delta < \infty$ для $\tilde{F}(x)$ выполняются оценки (13), (14) и справедлива теорема 1.

2. Обратная задача. Данные рассеяния, приведенные в предыдущем пункте, позволяют восстановить потенциальную матрицу $V(x)$ в уравнении (1). Для этого они должны удовлетворять следующим условиям: $0 < \chi_n < m$, функция $s_{21}(k, \lambda)$ непрерывна при $-\infty < k < \infty$, $s_{21}(0, \pm m) = -1$, удовлетворяет соотношению $s_{21}(k, \lambda) = \overline{s_{21}(-k, \lambda)}$, неравенству $|s_{21}(k, \lambda)| < 1$ при $k \neq 0$, и асимптотике $s_{21}(k, \lambda) = O(\frac{1}{k})$ при $|k| \to \infty$; элементы матрицы-функции $F_s(x)$ должны удовлетворять неравенствам (13), (14) при $-\infty < \delta \leqslant x$, а матрицы-функции $\tilde{F}_s(x)$ — при $x \leqslant \delta < \infty$.

Решая интегральное уравнение (11) с ядром $F(x)$, построенным по формуле (12), получим матрицу-функцию $K(x, y)$, для которой выполняются следующие оценки при $-\infty < \gamma \leqslant x < \infty$:

$$|K_{11,22}(x, x)| \leqslant \frac{c_2(\gamma)}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}, \quad |K_{12,21}(x, x)| \leqslant \frac{c_2(\gamma)}{1 + |x|^{2+2\varepsilon}}, \tag{16}$$

$$\left[|K'_{ij_x}(x, y)| + |K'_{ij_y}(x, y)|\right]_{x=y} \leqslant \frac{c_2(\gamma)}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}. \tag{17}$$

С помощью этих оценок доказывается

Теорема 2. *Матрица-функция $K(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$BK'_x(x, y) + K'_y(x, y)B + V(x)K(x, y) + mTK(x, y) - mK(x, y)T = 0$$

с начальным условием

$$\lim_{y\to\infty} K_{ij}(x, y) = 0,$$

в котором положено

$$V(x) = BK(x, x) - K(x, x)B. \tag{18}$$

Отсюда, как известно, следует, что вектор-функция $f_1(x; k, \lambda)$, определенная по формуле (3), удовлетворяет уравнению (1) с потенциалом $V(x)$, определенным выражением (18).

Для доказательства соотношений (8), (9) и оценок (2) на всей оси необходимо воспользоваться решением $\tilde{K}(x, y)$ уравнения (15). Для $\tilde{K}(x, y)$ выполняются оценки (16) и (17) на интервале $-\infty < x \leqslant \gamma < \infty$ и справедлива теорема 2, если в начальном условии заменить $+\infty$ на $-\infty$. Теперь из соотношения (18) определится потенциал $\tilde{V}(x)$, а по формуле (4) — решение уравнения (1) с этим потенциалом. Доказательство соотношений (8) и (9) и равенства $\tilde{V}(x) = V(x)$ производится аналогично ([4]). Из этого равенства и оценок (16), (17) для $K(x, x)$ и $\tilde{K}(x, x)$ следуют оценки (2) для $V(x)$.

Автор считает своим долгом выразить благодарность проф. Б. М. Левитану за постановку задачи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, ДАН, 167, № 6 (1966). [2] М. Г. Гасымов, Труды Московск. Матем. общ., 19 (1968). [3] Л. Д. Фаддеев. ДАН, 121, № 1 (1958). [4] Л. Д. Фаддеев, Труды математ. инст. им. В. А. Стеклова, 73, 314 (1964).