

УДК 517.941.92

МАТЕМАТИКА

С. И. ТАРЛИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 28 I 1972)

Статья продолжает исследования ⁽¹⁻⁴⁾. Рассмотрим игровую задачу сближения — уклонения. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$dx/dt = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0; \quad (1)$$

здесь x — n -мерный фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, стесненные ограничениями $u \in P$, $v \in Q$, где P и Q — компакты. Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет по x условию Липшица. Первый игрок стремится обеспечить встречу фазовой точки $x[t]$ с заданным замкнутым множеством M до выхода ее из заданного замкнутого множества N , второй игрок препятствует этой встрече. В соответствии с ⁽²⁻⁴⁾ определим стратегию $U = U(t, x)$ как функцию, которая позиции $\{t, x\}$ ставит в соответствие множество $U(t, x) \subset P$. Движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, U]$ определяются ⁽⁴⁾ как пределы ломаных Эйлера $x_\Delta[t] = x_\Delta[t; t_0, x_0, U]$, которые удовлетворяют контингенциям

$$dx_\Delta/dt \in F(t, x_\Delta[t], u[\tau_k]),$$

$$u[\tau_k] \in U(\tau_k, x_\Delta[\tau_k]) \quad \text{при} \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1},$$

$$\tau_{k+1} - \tau_k \leq \Delta, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad F = \overline{\text{co}}\{f(t, x, u, v), \quad v \in Q.$$

Постановка задачи не исключает, что второму игроку известен выбор управляющего воздействия $u[t]$. Под стратегией V_u второго игрока понимается функция, которая каждой тройке $\{t, x, u\}$ ставит в соответствие замкнутое множество $V_u = V(t, x, u) \subset Q$, причем функция $V(t, x, u)$ полунепрерывна по включению. Движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, V_u]$ суть пределы ломаных $x_\Delta[t] = x_\Delta[t; t_0, x_0, V_u]$, удовлетворяющих контингенциям

$$dx_\Delta/dt \in F_{V_u}(t, x_\Delta[t], u[\tau_i]),$$

где $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$, $\tau_{k+1} - \tau_k \leq \Delta$, $\Delta \rightarrow 0$, $u[\tau_i] \in P$,

$$F_{V_u}(t, x, u) = \overline{\text{co}}\{f(t, x, u, v)\} \quad \text{при} \quad v \in V(t, x, u).$$

Скажем, что стратегия U обеспечивает встречу к моменту ϑ , если для всякого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, u]$ хотя бы при одном $t_M = t_M(x[\cdot]) \in [t_0, \vartheta]$ имеем $x[t_M] \in M$ и при этом $x[t] \in N$ при всех t ; $t_0 \leq t \leq t_M$. Стратегия V_u , по определению, обеспечивает уклонение до момента ϑ , если всякое движение $x[t; t_0, x_0, V_u]$ либо не попадает на M при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, либо выходит из N до попадания на M . Рассмотрим задачу о встрече. Для каждой функции $V_u = V(t, x, u)$ определим множества

$G_1(t, x, V_u) = \overline{\text{co}}\{f(t, x, u, v)\}$, где $u \in P$, $v \in V(t, x, u)$. Пусть теперь

$$H_1(t, x) = \bigcap_{V_u} G_1(t, x, u); \quad (2)$$

здесь пересечение берется по всем полунепрерывным функциям V_u .

Условие 1. Каждое из множеств $H_1(t, x)$ не пусто.

Справедлива

Лемма 1. Вектор $h \in H_1(t, x)$ тогда и только тогда, когда для каждого n -мерного вектора l справедливо неравенство

$$\max_P \min_Q l'f(t, x, u, v) \geq l'h; \quad (3)$$

здесь штрих означает транспонирование.

Множества $H_1(t, x)$ суть выпуклые компакты, полунепрерывные по t, x . Введем уравнение в контингенциях

$$dz/dt \in H_1(t, z), \quad z(\tau) = w, \quad (4)$$

имеющее решения $z(t)$ при условии 1, согласно (5). Определим множества $W_1(t, \theta)$, $t_0 \leq t \leq \theta$: вектор $w \in W_1(\tau, \theta)$ тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно решение уравнения (4) $z(t) = z(t; \tau, w)$, для которого при каком-то $t_* \in [\tau, \theta]$ имеем $z(t_*) \in M$, причем $z(t) \in N$ при всех t ; $\tau \leq t \leq t_*$.

Лемма 2. Каждое из множеств $W_1(t, \theta)$ не пусто и замкнуто.

Экстремальная стратегия U^e к множествам $W_1(t, \theta)$ строится по следующему правилу. Если $x \in W_1(t, \theta)$, то $U^e(t, x) = P$. Если $x \notin W_1(t, \theta)$, то выделим в $W_1(t, \theta)$ множество точек $w_0 = w_0(t, x)$, ближайших к точке x . В качестве $U^e(t, x)$ выберем все векторы $u^e \in P$, удовлетворяющие условию

$$\min_Q s_0'f(t, x, u^e, v) = \max_P \min_Q s_0'f(t, x, u, v) \quad (5)$$

по крайней мере при одном значении $s_0 = w_0 - x$.

Теорема 1. Если начальный вектор x_0 принадлежит $W_1(t_0, \theta)$, то экстремальная стратегия U^e (5) обеспечивает встречу с множеством M к моменту θ .

Рассмотрим теперь задачу о минимаксе времени наведения движений $x[t; t_0, x_0, U]$ на M :

$$\theta^0 = \min_U \sup_{v_u} \sup_{x[\cdot]} \{t_M^0(x[\cdot])\}.$$

где $t_M^0(x[\cdot])$ — первый момент встречи $x[t]$ с M .

Введем функцию

$$\psi(t, x, l) = \max_P \min_Q l'f(t, x, u). \quad (6)$$

Условия 2. Функция $\psi(t, x, l)$ (6) есть функция, выпуклая по l при каждом фиксированном значении $\{t, x\}$.

Пусть

$$G_1(t, x, u) = \overline{\text{co}} \{f(t, x, u, v)\}, \quad v \in Q. \quad (7)$$

Лемма 3. Если выполняется условие 2, то пересечение любого из множеств $G_1(t, x, u)$, $U \in P$, с множеством $H_1(t, x)$ (3) не пусто.

Поставим теперь в соответствие каждому значению τ , $t_0 \leq \tau \leq \theta$, множество $W_1^\alpha(\tau, \theta)$ всех векторов таких, что любое движение (4) $z(t) = z(t; \tau, w)$ удовлетворяет оценке

$$\rho(z(t), M) \geq \alpha > 0 \quad \text{при} \quad \tau \leq t \leq t_\alpha, \quad t_\alpha \leq \theta,$$

где t_α — момент выхода $z(t)$ из N^α , где N^α — α -окрестность N . Здесь символ $\rho(z, N)$ означает евклидово расстояние от точки z до множества N . Предположим, что $W_1^\alpha(t, \theta)$ не пусты. Построим к множествам $W_1^\alpha(t, \theta)$ экстремальную стратегию V_u^α : если $x \in W_1^\alpha(t, \theta)$, то $V^\alpha(t, x, u) = Q$. В ином случае выделим семейство точек w_0 из $W_1^\alpha(t, \theta)$, ближайших к x . Определим $V^\alpha(t, x, u)$ как совокупность всех векторов v_u , удовлетворяющих, хотя

бы при одном значении $s_0 = x - w_0$, равенству

$$s_0 f(t, x, u, v_u) = \min_Q s_0 f(t, x, u, v). \quad (8)$$

Используя лемму 3, можно доказать следующее предложение.

Теорема 2. Пусть $x_0 \in W_1^\alpha(t_0, \vartheta)$; тогда каждое из множеств $W_1^\alpha(t, \vartheta)$ не пусто при достаточно малых α . Если $\psi(t, x, l)$ (6) — выпуклая по l функция, то экстремальная стратегия V_u^α для любого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, V_u^\alpha]$ гарантирует оценку $\rho(x[t], M) \geq \alpha$ при $t_0 \leq t \leq t_\alpha$, $t_\alpha \leq \vartheta$, где t_α — момент выхода $x[t]$ из N^α .

Вернемся к системе множеств $W_1(t, \vartheta)$. Пусть $\vartheta^0 = \vartheta^0(t_0, x_0)$ — момент времени, когда впервые $x_0 \in W_1(t_0, \vartheta^0)$. Согласно (3), такой момент ϑ^0 (конечный или бесконечный) всегда существует. Из теоремы 1 и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Если выполнено условие 2 и для данных $\{t, x\}$ имеем $\vartheta^0 < \infty$, то значение ϑ^0 является минимаксом времени до встречи.

Действительно, поскольку $x_0 \in W_1(t_0, \vartheta^0)$, то, согласно теореме 1, экстремальная к $W_1(t, \vartheta^0)$ стратегия обеспечивает встречу к моменту ϑ^0 . С другой стороны, если $\vartheta < \vartheta^0$, то x_0 не принадлежит $W_1(t_0, \vartheta)$. Следовательно, существует такое $\alpha = \alpha(\vartheta)$, что для любого движения (4) $z(t) = z(t; t_0, x_0)$ справедливо неравенство

$$\rho(z(t), M) \geq \alpha, \quad t_0 \leq t \leq t_\alpha,$$

где t_α — момент времени, когда впервые $\rho(z(t_\alpha), N) \geq \alpha$. Следовательно, можно построить множества $W_1^\alpha(t, \vartheta)$ и к ним стратегию (8), которая, согласно теореме 2, обеспечивает уклонение до момента времени ϑ . Теорема 3 доказана.

Подвергнем задачу инверсии и отбросим ограничение $x \in N$. Скажем, что стратегия $V_u = V(t, x, u)$ обеспечивает сближение с M к моменту ϑ , если для каждого движения $x[t] = x[t; t_0, x_0, V_u]$ хотя бы при одном значении $t_M(x[\cdot]) \in [t_0, \vartheta]$ имеем $x[t_M] \in M$. Стратегия $U = U(t, x)$ обеспечивает уклонение до момента ϑ , если всякое движение $x[t] = x[t; t_0, x_0, U]$ не попадает на M при $t \in [t_0, \vartheta]$. Пусть

$$G_2(t, x, u) = \overline{\text{co}} \{f(t, x, u, v)\}, \quad v \in Q, \\ H_2(t, x) = \bigcap_u G_2(t, x, u), \quad (9)$$

где пересечение берется по всем $u \in P$.

Предположим, что каждое из множеств $H_2(t, x)$ не пусто и введем уравнение

$$dy/dt \in H_2(t, y), \quad y(\tau) = w. \quad (10)$$

Скажем, что $w \in W_2(\tau, \vartheta)$ тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно решение уравнения (10). $y(t) = y(t; \tau, w)$, попадающее на M к моменту ϑ . Экстремальная стратегия V_u^ϵ строится так же, как и выше V_u^α , с той лишь разницей, что множества $W_1^\alpha(t, \vartheta)$ заменяются на $W_2(t, \vartheta)$.

Теорема 4. Если $x_0 \in W_2(t_0, \vartheta)$, то экстремальная стратегия V_u^ϵ обеспечивает встречу движений $x[t; t_0, x_0, V_u^\epsilon]$ с множеством M к моменту времени ϑ .

Обозначим $G_2(t, x, V_u) = \overline{\text{co}} \{f(t, x, u, v)\}$, где $v \in V(t, x, u)$, $u \in P$,

$$D(t, x, V_u) = G_2(t, x, V_u) \cap H_2(t, x). \quad (11)$$

Условие 3. При всяком $\{t, x\}$ и при любом выборе полунепрерывной функции V_u множество D не пусто. Определим систему множеств $W_2^\alpha(\tau, \vartheta)$ условием: $w \in W_2^\alpha(\tau, \vartheta)$ тогда и только тогда, когда для любого движения (11) $y(t) = y(t, \tau, w)$ справедливо неравенство

$$\rho(y(t), M) \geq \alpha > 0, \quad t \in [\tau, \vartheta].$$

Экстремальная стратегия U^a строится так же, как выше U^e , но с заменой $W_1(t, \vartheta)$ на $W_2^a(t, \vartheta)$.

Теорема 5. Пусть множества $D(t, x, V_v)$ (11) не пусты и $x_0 \in W_2^a(t_0, \vartheta)$.

Тогда стратегия U^a гарантирует оценку

$$\rho(x[t], M) \geq \alpha, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x[t] = x[t; t_0, x_0, U^a].$$

Обозначим через $\vartheta_0 = \vartheta_0(t_0, x_0)$ момент времени, когда впервые $x_0 \in W_2(t_0, \vartheta_0)$. Справедлива

Теорема 6. Если выполняется условие 3, то для любого значения ϑ , $\vartheta < \vartheta_0$, существует стратегия U , обеспечивающая уклонение до момента времени ϑ .

Величину $\vartheta_0 = \vartheta_0(t_0, x_0)$ из теоремы 4 и теоремы 6 назовем максимальным временем до встречи.

Приведем пример, для которого выполняются условие 2 и условие 3. Рассмотрим управляемое движение $x[t] = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ вида

$$dx_1/dt = x_3, \quad dx_2/dt = x_4,$$

$$dx_3/dt = f_1(t, x) + u_1 \cos v_3 + u_2 \sin v_3,$$

$$dx_4/dt = f_2(t, x) - u_1 \sin v_3 + u_2 \cos v_3, \quad x[t_0] = x_0,$$

где $u_1^2 + u_2^2 \leq \mu^2$; $v_1^2 + v_2^2 \leq v^2$; $|v_3| \leq \alpha < 1/2\pi$, причем $\mu \cos \alpha - v > 0$. Заметим, что если x_0 не принадлежит M , то минимакс времени наведения ϑ^0 на M оказывается строго большим соответствующего максимального результата ϑ_0 .

Автор выражает благодарность акад. Н. Н. Красовскому за предложенную задачу и внимание к работе.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
17 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Понтрягин, ДАН, 174, № 6, 1278 (1967). ² Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, 34, № 6, 1022 (1970). ³ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, 35, № 1, 110 (1971). ⁴ Н. Н. Красовский, ДАН, 204, № 2, 270 (1971). ⁵ А. Ф. Филиппов, Математич. сборн., 51, № 1, 101 (1960).