Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 1

УДК 511.84 *МАТЕМАТИКА*

Н. И. ФЕЛЬДМАН

ОДНО НЕРАВЕНСТВО, СВЯЗАННОЕ С ЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ ОТ ЛОГАРИФМОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 13 III 1972)

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, β — алгебраические числа поля $K = \mathbf{Q}(\theta)$, отличные от нуля, $A_1, \ldots, A_m$, A — их высоты. $b_1, \ldots, b_m$ — целые рациональные, $H = \max|b_k|$, $\delta > 0$, $a_0 \geqslant (|\beta|, |\beta^{-1}|)$. Буквами $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots$ будем обозначать эффективные положительные постоянные, не зависящие от A и H. Они могут зависеть от $A_1, \ldots, A_m, \theta, a_0, \delta, m$ и выбора ветвей логарифмов $\ln \alpha_1, \ldots, \ln \alpha_m, \ln \beta$.

В работе ([1]), стр. 980, доказана

Теорема 1. *Пусть* $\ln \alpha_1, \ldots, \ln \alpha_m, \ln \beta$ — *фиксированные ветви логарифмов. Если выполняются условия*

1) β *не может быть корнем уравнения типа*

$$\alpha_1^{T_1} \ldots \alpha_m^{T_m} z^N + \sum_{\nu=0}^{N-1} B_\nu z^\nu = 0, \tag{1}$$

где $T_1, \ldots, T_m$ *целые неотрицательные, а* B_ν — *многочлены с целыми коэффициентами от* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$,

2) $$|b_1 \ln \alpha_1 + \ldots + b_m \ln \alpha_m - \ln \beta| < e^{-\delta H}, \tag{2}$$

то

$$H < \gamma(1 + \ln A). \tag{3}$$

В настоящей работе показано, что условие 1) можно снять, заменив его необходимым условием

$$b_1 \ln \alpha_1 + \ldots + b_m \ln \alpha_m - \ln \beta \neq 0. \tag{4}$$

Следующая лемма уточняет лемму 7 работы ([1]).

Лемма. *Пусть* $a_1, \ldots, a_m$ *целые рациональные, определитель*

$$\Delta = |\alpha_1^{k_1 x} \ldots \alpha_m^{k_m x} \beta^{l x} (k_1 + l a_1)^{\sigma_1} \ldots (k_m + l a_m)^{\sigma_m}|,$$

$$k_1, \ldots, k_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m = 0, 1, \ldots, q-1; \quad l, x = 0, 1, \ldots, q_0 - 1$$

(набор $\{k_1, \ldots, k_m, l\}$ *определяет столбец, а набор* $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m, x\}$ — *строку). Тогда*

$$\begin{gathered}\Delta = B \sum_{\nu=M}^{N} B_\nu \beta^\nu, \quad N = \frac{1}{6} q_0 (q_0 - 1)(2q_0 - 1) q^m, \\ M = \frac{1}{6} q_0 (q_0 - 1)(q_0 - 2) q^m, \\ B_m = \pm \alpha_1^{r_1} \ldots \alpha_m^{r_m}, \quad B_N = \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_m^{p_m},\end{gathered} \tag{5}$$

где $B \neq 0$, $B_{M+1}, \ldots, B_{N-1}$ — *многочлены от* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *с целыми рациональными коэффициентами,* $p_1, \ldots, p_m$, $r_1, \ldots, r_m$ *целые неотрицательные.*

Доказательство. Условия леммы совпадают с условиями леммы 7 работы ([1]), а в заключении новым является лишь утверждение о форме коэффициента B_M. Определитель Δ является многочленом от β. Пусть $B_M\beta^M$ — младший член этого многочлена. Тогда

$$M = \{0\cdot(q_0-1)+1\cdot(q_0-2)+\ldots+(q_0-2)\cdot 1+(q_0-1)\cdot 0\}q^m = \\ = {}^1/_6 q_0(q_0-1)(q_0-2)q^m,$$

а вычисление B_M производится точно так же, как и вычисление B_N в лемме 7 работы (1). Получим

$$B_M = \pm B\alpha_1^{r_1}\ldots\alpha_m^{r_m}, \tag{6}$$

где $r_1, \ldots, r_m$ целые неотрицательные. Теперь утверждение нашей леммы вытекает из (6) и леммы 7 из (1).

Как видно из (1), стр. 987, доказанная лемма позволяет в условии 1 теоремы 1 считать, что многочлен (1) имеет вид (5).

Таким образом, остается рассмотреть лишь те $\beta \in K$, которые являются корнями многочленов типа (5) и не равны нулю. В дальнейшем рассматриваются именно такие β.

Разберем главный случай: β не является алгебраической единицей. а в поле K содержатся алгебраические единицы, отличные от корней из единицы. В других случаях доказательство проще. Будем также предполагать, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ целые алгебраические, так как каждое дробное α_k можно заменить отношением двух целых чисел из K, а это может привести лишь к появлению в линейной форме (2) нескольких новых слагаемых.

Из формы старшего и младшего коэффициентов многочлена (5) следует, что главный идеал (β) (возможно, дробный) имеет вид

$$(\beta) = \mathfrak{S}_1^{\nu_1}\ldots\mathfrak{S}_s^{\nu_s}, \tag{7}$$

где $\nu_1, \ldots, \nu_s$ целые, а $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_s$ — простые идеалы поля K, являющиеся делителями $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Если h — число классов идеалов поля K, то $\mathfrak{S}^h$ является главным идеалом поля K. Положим $\mathfrak{S}_k^h = (\delta_k)$, $k = 1, \ldots, s$, тогда

$$\beta = \delta_0\delta_1^{y_1}\ldots\delta_s^{y_s}\zeta_1^{z_1}\ldots\zeta_r^{z_r}, \tag{8}$$

где δ_0 принадлежит фиксированному набору D чисел из K, $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ — основные единицы поля K, а показатели $y_1 = [\nu_1/h], \ldots, y_s = [\nu_s/h]$, $z_1, \ldots, z_r$ — целые рациональные числа. Тогда вместо (2) получим

$$|b_1\ln\alpha_1+\ldots+b_m\ln\alpha_m-\ln\delta_0-y_1\ln\delta_1-\ldots \\ \ldots-y_s\ln\delta_s-z_1\ln\zeta_1-\ldots-z_r\ln\zeta_r+2z\pi i| < e^{-\delta H}, \tag{9}$$

где z также целое рациональное. Пусть логарифмы, входящие в (9), линейно с целыми рациональными коэффициентами выражаются через линейно независимые логарифмы $\ln\eta_1, \ldots, \ln\eta_p$, где $\eta_1, \ldots, \eta_p$ — числа из K. Тогда (9) принимает вид

$$|L| = |(x_1\ln\eta_1+\ldots+x_p\ln\eta_p)\gamma_0^{-1}| < e^{-\delta H}, \tag{10}$$

где $x_1, \ldots, x_p$ целые рациональные, γ_0 — общий знаменатель коэффициентов представления логарифмов формы (9) через $\ln\eta_1, \ldots, \ln\eta_p$. При этом $x_1^2+\ldots+x_p^2 > 0$ вследствие условия (4). Пусть

$$h_0 = \max(|y_1|, \ldots, |y_s|, |z_1|, \ldots, |z_r|), \tag{11}$$

тогда $|z| \leqslant \gamma_1 h_0$, так как мнимые части чисел $\ln\alpha_1, \ldots, \ln\alpha_m, \ln\delta_0$, $\ln\delta_1, \ldots, \ln\delta_s$, $\ln\zeta_1, \ldots, \ln\zeta_r$ ограничены. Таким образом,

$$x = \max(|x_1|, \ldots, |x_p|) \leqslant \gamma_2 h_0. \tag{12}$$

Для оценки $|L|$ снизу воспользуемся теоремой 1 работы (2). Рациональное число $x_k\gamma_0^{-1}$ удовлетворяет уравнению $\gamma_0 t - x_k = 0$; следовательно, для величины H_0 из этой теоремы имеем неравенство $H_0 \leqslant x+\gamma_0 \leqslant \gamma_2 h_0+\gamma$, откуда

$$|L| > \exp\{-\gamma_3-\gamma_4\ln(\gamma_0+\gamma_2 h_0)\}. \tag{13}$$

Сравнив (10) и (13), получим

$$\gamma_3 + \gamma_4 \ln (\gamma_0 + \gamma_2 h_0) > \delta H. \tag{14}$$

Теперь осталось перейти от h_0 к A. Пусть γ_5 не меньше абсолютных величин логарифмов модулей чисел $\delta_1, \ldots, \delta_s$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$, чисел из D и всех их сопряженных. Пусть R — регулятор поля K, ρ — максимум модулей его миноров порядка $r-1$. Если

$$y = \max |y_k| \geqslant \frac{Rh_0}{2r(s+1)\rho\gamma_5},$$

то хотя бы один из простых идеалов разложения (7) входит в (β) в степени ν, для которой $|\nu| \geqslant \gamma_6 h_0$. Но этот идеал в степени, не меньшей $|\nu|$, делит или старший коэффициент, или свободный член неприводимого уравнения для β, следовательно, в этом случае

$$A > \exp (\gamma_7 h_0). \tag{15}$$

Если же

$$y < \frac{Rh_0}{2r(s+1)\rho\gamma_5}, \tag{16}$$

то вследствие выбора γ_5 и (11) имеем $|z_t| = h_0$, где t — одно из чисел $1, \ldots, r$. Положим

$$\omega = \beta\delta_0^{-1}\delta_1^{-y_1} \ldots \delta_s^{-y_s},$$

тогда, переходя в (8) к сопряженным и обозначая символами $\omega^{(k)}$ и $\zeta_l^{(k)}$ сопряженные чисел $\omega = \omega^{(1)}$ и $\zeta_l = \zeta_l^{(1)}$, $l = 1, \ldots, r$, получим

$$z_1 \ln |\zeta_1^{(1)}| + \ldots + z_r \ln |\zeta_r^{(1)}| = \ln |\omega^{(1)}|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_1 \ln |\zeta_1^{(r)}| + \ldots + z_r \ln |\zeta_r^{(r)}| = \ln |\omega^{(r)}|.$$

Из этой системы уравнений следует неравенство

$$h_0 \leqslant \frac{r\rho}{R} \max_{1 \leqslant s \leqslant r} |\ln |\omega^{(s)}|| = \frac{r\rho}{R} |\ln |\omega^{(\sigma)}||,$$

где σ — одно из чисел $1, \ldots, r$. Отсюда и из (16) получаем

$$\left| \ln |\beta^{(\sigma)}| \right| \geqslant \frac{Rh_0}{r\rho} - \left| \ln |\delta_0^{(\sigma)}\delta_1^{(\sigma)^{y_1}} \ldots \delta^{(\sigma)^{y_s}}| \right| \geqslant \frac{Rh_0}{r\rho} - (sy+1)\gamma_5 \geqslant$$

$$\geqslant h_0 \left\{ \frac{R}{r\rho} - (s+1)\gamma_5 \frac{R}{2r(s+1)\rho\gamma_5} \right\} = \frac{Rh_0}{2r\rho} = \gamma_8 h_0.$$

Таким образом, или $|\beta^{(\sigma)}| \geqslant \exp (\gamma_8 h_0)$, или $|\beta^{(\sigma)}| \leqslant \exp (-\gamma_8 h_0)$.

Известно, что если $\beta \neq 0$ является корнем многочлена высоты A, то справедливо неравенство ($g > 0$ — старший коэффициент)

$$(A_0 + 1)^{-1} < |\beta| < A_0 + 1, \quad A_0 = A / g.$$

Отсюда и из (16) получаем неравенство

$$A + 1 > \exp (\gamma_8 h_0). \tag{17}$$

Теперь из (14), (15) и (17) легко выводится (3).

З а м е ч а н и е. В условиях теоремы 1 равенство $\max |b_k| = H$ можно заменить равенством $\max |b_k| = H^a$, где a любое положительное. В этом случае γ в неравенстве (3) будет зависеть и от a.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ф е л ь д м а н, Математич. сборн., **77** (119), 423 (1968). [2] Н. И. Ф е л ь д м а н, ИАН, сер. матем., **35**, 973 (1971).