Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Ю. Е. АНИКОНОВ

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ 1-ГО РОДА

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 30 III 1972)

Здесь рассматриваются общие нелинейные операторные уравнения 1-го рода, к исследованию которых приводит ряд обратных задач для дифференциальных уравнений (см. ([1-4])). Приводятся результаты по однозначности решения таких уравнений. При доказательстве используются некоторые свойства действительных аналитических функций многих переменных, например неравенство Лоясевича ([5]), а также результаты А. Г. Витушкина, связанные с исследованием вариаций множеств ([6]) и другие.

Пусть D — открытое n-мерное множество в эвклидовом пространстве E^n переменных $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Покрытием множества D в дальнейшем называем совокупность $\{\omega\}$ множеств $\omega\subset D$, объединение которых равно D.

Пусть $\{\lambda\}$ — некоторое множество действительных функций $\lambda=\lambda(x)$, заданных в области D, а $\{\tau\}$ — некоторое множество произвольной природы. Предположим, что каждой функции $\lambda(x)\in\{\lambda\}$ поставлен в соответствие по закону A единственный элемент множества $\{\tau\}$, т. е. $A\lambda=\tau$, где A — некоторый оператор.

Определение. Оператор A называется *квазимонотонным относительно покрытия* $\{\omega\}$ *области* D, если из неравенства $\lambda_1(x)>\lambda_2(x)$, $\lambda_i\in\{\lambda\}$, $i=1, 2$, выполненного хотя бы на одном непустом множестве $\omega\subset\{\omega\}$, следует, что $A\lambda_1\neq A\lambda_2$.

С физической точки зрения это определение для операторов обратных задач означает следующее: пусть две среды характеризуются функциями $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$, а $\tau_1=A\lambda_1$, $\tau_2=A\lambda_2$ — это результаты наблюдения какого-либо одинакового эксперимента, проведенного в обеих средах. Определение выделяет те операторы A, для которых из условия строгого неравенства $\lambda_1(x)>\lambda_2(x)$ хотя бы на одном множестве $\omega\in\{\omega\}$ вытекает, что результаты наблюдения τ_1 и τ_2 различны.

Для некоторых операторов A и специально выбранных покрытий $\{\omega\}$ проверка квазимонотонности иногда легко осуществляется. К таким операторам относятся, например, операторы обратных задач, связанные с гиперболическими уравнениями (см. ([1, 3, 4])).

Приведем теперь результаты по однозначности решения операторного уравнения $A\lambda=\tau_0$ для двух конкретных покрытий $\{\omega\}$ области D.

1. Пусть область D гомеоморфна шару $|x|<1$, а ее граница Γ является аналитической поверхностью и пусть покрытие $\{\omega\}$ области D состоит из пересечений области D с шарами $k(t,r)=\{|x-t|<r\}$, где $t\in\Gamma$, $r>0$, $x\in D$. Элемент покрытия $\omega\in\{\omega\}$ будем называть окрестностью точки $t\in\Gamma$.

Рассмотрим множества $\{a\}$ действительных аналитических в замкнутой области $\bar D$ функций $a=a(x)$ и пусть $\{\varphi\}$ — множество плоских функций, заданных также в $\bar D$, а именно: $\varphi(x)\in\{\varphi\}$, если для любого числа $l>0$ имеет место равенство

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\varphi(x)}{\rho(x,\Gamma)^l}=0;$$

здесь $\rho(x,\Gamma)$ — расстояние точки $x\in D$ до границы Γ области D.

Определим класс $\{\lambda\}$ функций $\lambda = \lambda(x)$ условиями:

1) каждая функция $\lambda(x) \in \{\lambda\}$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$;

2) для любой функции $\lambda(x) \in \{\lambda\}$ существуют последовательности $a_k(x)$ и $\varphi_k(x)$, $a_k \in \{a\}$, $\varphi_k \in \{\varphi\}$ такие, что $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ и при любом k имеет место неравенство $|\lambda(x) - \lambda(t) - a_k(x)| \leqslant \varphi_k(x)$, $x \in D$, $t \in \Gamma$. Примером последовательности $\varphi_k(x)$ могут служить функции

$$\varphi_k(x) = e^{-1/k\rho(x,\Gamma)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Множество $\{\lambda\}$, определенное выше, будем называть регулярным. Из определения класса $\{\lambda\}$ следует, что множество функций $\{\lambda\}$ является линейным множеством и содержит в себе аналитические в замкнутой области $\bar{D}$ функции. Кроме того, класс $\{\lambda\}$ обладает еще одним интересным свойством; а именно: каковы бы ни были две функции $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$, $\lambda_i \in \{\lambda\}$, $\lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$, существует окрестность $\omega \in \{\omega\}$ такая, что либо $\lambda_1 > \lambda_2$, либо $\lambda_2 > \lambda_1$ для $x \in \omega$. Из этого свойства следует

Теорема 1. *Пусть $\{\lambda\}$ — множество регулярных функций $\lambda = \lambda(x)$, $x \in \bar{D}$. Для того чтобы уравнение $A\lambda = \tau_0$, $\tau_0 \in \{\tau\}$, имело в некоторой окрестности $\omega \in \{\omega\}$ не более одного решения $\lambda \in \{\lambda\}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был квазимонотонным относительно покрытия $\{\omega\}$ области D.*

Замечание. Теорема 1, вообще говоря, неверна, если предположить, что функции $a_k(x)$ аналитичны лишь в открытой области D.

2. Пусть D — шар в E^n, $D = \{|x| < R\}$. Обозначим через $\{\omega\}$ множество всех открытых шаров ω одного и того же радиуса $r, 0 < r < R$, каждый из которых содержится в шаре D. Множество $\{\omega\}$, очевидно, является покрытием шара D. Если A — квазимонотонный оператор относительно такого покрытия $\{\omega\}$ шара D, то имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda\}$ — множество всех полиномов степени не выше m (по каждой из переменных x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$), а число r определено равенством*

$$r = \begin{cases} \dfrac{R^n}{3 + 6^n(m+1)^n n}, & \text{если} \quad R \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{R}{3 + 6^n(m+1)^n n}, & \text{если} \quad R > 1. \end{cases}$$

Тогда уравнение $A\lambda = \tau_0$ имеет не более одного решения $\lambda \in \{\lambda\}$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
23 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, Многомерные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1969. [2] А. С. Алексеев, М. М. Лаврентьев, Сборн. Математические проблемы геофизики, в. 3, Новосибирск, 1969. [3] В. Г. Романов, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, 1969. [4] Ю. Е. Аниконов, Сборн. Математические проблемы геофизики, в. 2, Новосибирск, 1971. [5] М. Мальгранж, Идеалы дифференцируемых функций, М., 1968. [6] А. Г. Витушкин, Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959.