Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. И. БЕЛУГИН

УПЛОТНЕНИЯ НА БИКОМПАКТЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 10 IV 1972)

Доказывается

Теорема. *Если из диадического бикомпакта выбросить счетное множество точек, то оставшееся пространство уплотняется на бикомпакт.*

Впервые теорема подобного типа доказана И. Л. Раухваргер ([1]) для компактов. Затем В. В. Произволов ([2]) распространил ее на произведения компактов. В. И. Пономарев заметил, что теорема неверна для экстремально несвязных бикомпактов.

Переходим к доказательству. Пусть $X = fD^\tau$ — несчетный диадический бикомпакт, где $D^\tau = \prod\limits_{\alpha \in \theta} D^\alpha$. $|\theta| = \tau$. Пусть $C = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$. Заметим, что внутренность $\langle C \rangle$ множества C можно считать пустой. Действительно, $X \setminus \langle C \rangle = \bigcap\limits_{c_{k_n} \in \langle C \rangle} (X \setminus \{c_{k_n}\})$ есть замкнутое G_δ-множество в диадическом бикомпакте X, следовательно, $X \setminus \langle C \rangle$ диадично ([3]).

Положим $C_k = f^{-1}c_k$. В силу предыдущего замечания, для любого k имеем: $C_k \not\subset \langle \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k \rangle$. Рассмотрим множество C_1 и некоторую его точку p^1. Для всякого $n \neq 1$ точка p^1 имеет элементарную окрестность $O_n p^1 = H_{\alpha_1^n, \ldots, \alpha_{s_n}^n}^{i_1, \ldots, i_{s_n}}$, содержащуюся в $D^\tau \setminus C_n$. Пусть $H_1 = \bigcap\limits_{n \neq 1} O_n p^1 = H_{(\alpha_k^1)}^{(i_{\alpha_k^1})}$, где $k = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $p^1 \in H_1 \subset D^\tau \setminus \bigcup\limits_{n \neq 1} C_n$. Возможны два случая.

1) $H_1 \subset C_1$. Тогда для любой точки $y \in D^\tau \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ существует точка $z \in C_1$ такая, что координаты точек y и z различны не более чем для счетного множества индексов.

2) Существует точка $x \in H_1 \setminus C_1$. В силу замкнутости множества C_1 найдется окрестность $H_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}^{i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_m}}$ точки x, не пересекающая C_1. Точка y, все координаты которой, кроме $y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_m}$, совпадают с координатами точки p^1, а при $l = 1, \ldots, m$ $y_{\alpha_l} = i_{\alpha_l}$ принадлежит $H_1 \cap H_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}^{i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_m}}$, следовательно, $y \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ и координаты точек y и $z = p^1$, за исключением конечного числа, совпадают.

Вывод из 1) и 2): для множества C_1 можно выбрать точки $y^1 \in D^\tau \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ и $z^1 \in C_1$, все координаты которых, за исключением не более чем счетного множества индексов $A_1 = \{\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1, \ldots\}$, совпадают.

Предположим, что для любого $k < m$ выбраны точки y^k, z^k и множества $A_k = \{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k, \ldots\}$ такие, что

a) $y^k \in D^\tau \setminus (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \cup (\bigcup\limits_{n<k} f^{-1}fy^n))$; $\quad z^k \in C_k$;

б) для любого $\alpha \notin A_k$ координаты y_α^k и z_α^k точек y^k и z^k совпадают:
в) для любых $i, j, i < k, j < k$ $y^k_{\alpha^j_i} = z^k_{\alpha^j_i}$.

Найдем точки y^m, z^m и множество A_m. Перенумеруем все индексы α^j_i, где $i < m$, $j < m$, по порядку: $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_s^0$. Рассмотрим некоторую точку $p^m \in C_m$. Аналогично предыдущему строим $H_m = H\binom{i_{\alpha_k^m}}{\alpha_k^m}$, где $k = 1, 2, \ldots$ так чтобы $p^m \in H_m \subset D^\tau \setminus (\bigcup_{n\neq m} C_n \cup (\bigcup_{n<m} f^{-1}fy^n))$. Будем считать, что $\{\alpha_l^0\}_{l=1}^s \subset \{\alpha_k^m\}_{k=1}^\infty$. Снова рассматриваем два случая.

1) $H_m \subset C_m$. Пусть $i_1^1, \ldots, i_s^1$ — значения слоя H_m на $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_s^0$. Если ни одно y, несущее на $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_s^0$ значения $i_1^1, \ldots, i_s^1$ не попадает в множество $K = D^\tau \setminus (\bigcup_n C_n \cup (\bigcup_{n<m} f^{-1} fy^n))$, то $H^{i_1^1,\ldots,i_s^1}_{\alpha_1^0,\ldots,\alpha_s^0} \subset \bigcup_n C_n \cup (\bigcup_{n<m} f^{-1} fy^n)$. Из открытости множества $H^{i_1^1,\ldots,i_s^1}_{\alpha_1^0,\ldots,\alpha_s^0} \setminus \bigcup_{n<m} f^{-1} fy^n$ следует, что $C_m \not\subset H^{i_1^1,\ldots,i_s^1}_{\alpha_1^0,\ldots,\alpha_s^0}$.

Найдется точка $p^{m_2} \in C_m$ такая, что $(p^{m_2}_{\alpha_1^0}, \ldots, p^{m_2}_{\alpha_s^0})$ не совпадает с $(i_1^1, \ldots, i_s^1)$.

Так же, как раньше, строим для точки p^{m_2} слой H_m^2. Если $H_m^2 \setminus C_m \neq \emptyset$, то мы попадаем в условия случая 2). Если $H_m^2 \subset C_m$, то снова пусть $i_1^2, \ldots, i_s^2$ — значения слоя H_m^2 на $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_s^0$. Если ни одно y, несущее на $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_s^0$ значения $i_1^2, \ldots, i_s^2$, не попадает в K, то точно так же покажем, что $C_m \not\subset H^{i_1^2,\ldots,i_s^2}_{\alpha_1^0,\ldots,\alpha_s^0}$.

Продолжая этот процесс, мы либо попадем в условия случая 2), либо на некотором шаге n найдем точку $y \in K$, имеющую на $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_s^0$ значения $i_1^n, \ldots, i_s^n$ (в противном случае мы получили бы, что

$$D^\tau = \bigcup_{n=1}^N H^{i_1^n,\ldots,i_s^n}_{\alpha_1^0,\ldots,\alpha_s^0} \subset \bigcup_n C_n \cup (\bigcup_{n<m} f^{-1} fy^n)$$

и $X \setminus C$ конечно).

2) Существует точка $x \in H_m \setminus C_m$. В этом случае достаточно заметить, что наш способ выбора точек y и z гарантирует совпадение их координат на $\{\alpha_k^m\}$.

Доказана возможность выбора точек y^k, z^k и множества A_k для любого k таким образом, чтобы выполнялись условия а), б), в).

Проведем разбиение π_1 пространства D^τ следующим образом. Для любого k пара $(y^k; z^k)$ есть элемент разбиения, остальные элементы разбиения π_1 одноточечны. Для доказательства непрерывности разбиения π_1 достаточно доказать его непрерывность для одноточечного элемента $x \in D^\tau$.

Пусть $H^{i_1,\ldots,i_s}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ — произвольная элементарная окрестность точки x. Если $\alpha_n \in \bigcup_k A_k \cap \{a_1, \ldots, a_s\}$, то пусть i_n, j_n—номера некоторого (фиксированного) $\alpha^{j_n}_{i_n} \in \bigcup_k A_k$ такого, что $\alpha_n = \alpha^{j_n}_{i_n}$ и $m = \max_n \{i_n, j_n \colon \alpha_n \in \bigcup_k A_k \cap \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}\}$.

Ясно, что при $k > m$ точки y^k, z^k могут принадлежать $H^{i_1,\ldots,i_s}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ только одновременно. Множество $H^{i_1,\ldots,i_s}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} \setminus \bigcup_{k\leqslant m} (\{y^k\} \cup \{z^k\})$ является окрестностью точки x, состоящей только из элементов разбиения π_1. Через π_2 обозначим непрерывное разбиение пространства D^τ, порожденное отображением f.

Рассмотрим следующее разбиение π пространства D^{τ}. Элементами π являются множества $C_k \cup f^{-1}fy^k$ для любого k и все остальные элементы разбиения π_2. Покажем, что разбиение π непрерывно. Пусть r — элемент разбиения и Or — его произвольная окрестность. Разбиение π_2 непрерывно, поэтому найдется окрестность r, $O_1r \subset Or$, такая, что из $f^{-1}x \cap O_1r \neq \phi$ следует, что $f^{-1}x \subset O_1r$. Для любого $p \in r$ O_1r является окрестностью. В силу непрерывности разбиения π_1, точка p имеет окрестность $Op \subset O_1r$ такую, что если $\{y^k; z^k\} \cap Op \neq \phi$, то $\{y^k; z^k\} \subset Op$. Обозначим $O_2r = \bigcup\limits_{p \in r} Op$. Тогда $r \subset O_2r \subset O_1r \subset Or$ и из $\{y^k; z^k\} \cap O_2r \neq \phi$ следует, что $\{y^k; z^k\} \subset O_2r$. Наконец, пусть окрестность r, $O_3r \subset O_2r$, такова, что если $f^{-1}x \cap O_3r \neq \phi$, то $f^{-1}x \subset O_3r$. Если элемент q разбиения π имеет вид $q = f^{-1}x$ и $q \cap O_3r \neq \phi$, то очевидно, $q \subset Or$. Если $q = C_k \cup f^{-1}fy^k$, то в случае $C_k \cap O_3r \neq \phi$ имеем включение $C_k \subset O_3r$ и, значит, $z^k \in O_2r$ и $y^k \in O_2r$ и $q \subset Or$. Если $y^k \in O_3r$, то $y^k \in O_2r$, а тогда и $z^k \in O_2r$ и $C_k \cap O_1r \neq \phi$. Имеем, что $C_k \subset O_1r$ и $q \subset Or$. Непрерывность разбиения π доказана. Отсюда следует, что $X \setminus C$ уплотняется на бикомпакт. Теорема доказана.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
5 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Л. Раухваргер, ДАН, **66**, 13 (1949). [2] В. В. Произволов, Матем. сборн., **68**, 417 (1965). [3] Б. А. Ефимов, Тр. Московск. матем. общ., **14**, 211 (1965).